Question I (10 Points)

Considérer l'équation d'onde unidimensionnelle

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \tag{$\diamond$}$$

où c est une constante quelconque. Considérer aussi les deux quantités e et p définies par

$$e \triangleq \frac{1}{2}\left(u_t^2 + c^2 u_x^2\right) \quad p \triangleq u_x u_t.$$

(a) (20%) Montrer que e est une densité conservée et donner le flux associé. Exprimer ce flux en fonction de p.

(b) (20%) Montrer que p est une densité conservée et donner le flux associé. Exprimer ce flux en fonction de e.

(c) (15%) Sur base des lois de conservation établies aux deux premières sous-questions, montrer que e vérifie l'équation d'onde $e_{tt} - c^2 e_{xx} = 0$, lorsque u vérifie ($\diamond$).

(d) (30%) D'une façon similaire, il est possible de montrer que p vérifie l'équation d'onde

$$p_{tt} - c^2 p_{xx} = 0. \tag{$\dagger$}$$

On considère le domaine $(x, t) \in [0, 1] \times [0, +\infty[$. Si l'on assortit l'équation ($\dagger$) des conditions aux limites $p(0, t) = 0,\ \forall t > 0$ et $p(1, t) = 0,\ \forall t > 0$, donner sa solution générale en utilisant la séparation de variables $p(x, t) = r(x)s(t)$. Justifier.

(e) (15%) Considérer maintenant les quantités f_n et q_n définies par récurrence par

$$f_n \triangleq \frac{1}{2}\left((\partial_t f_{n-1})^2 + c^2(\partial_x f_{n-1})^2\right) \quad q_n \triangleq (\partial_t f_{n-1})(\partial_x f_{n-1})$$

avec $f_0 = e$ et $q_0 = p$. Montrer que f_n est une quantité conservée pour tout n.

Solution

(a) La dérivée temporelle de e donne successivement

$$\begin{aligned}
\partial_t e &= \partial_t \frac{1}{2}\left(u_t^2 + c^2 u_x^2\right) && (1)\\
&= u_t u_{tt} + c^2 u_x u_x t && (2)\\
&= c^2 u_t u_{xx} + c^2 u_x u_x t && (3)\\
&= c^2 \partial_x \left(u_x u_t\right) && (4)\\
&= c^2 p_x. && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}$$

La loi de conservation peut donc s'écrire

$$e_t - c^2 p_x = 0. \tag{7}$$

(b) La dérivée temporelle de p donne successivement

$$\begin{aligned}
\partial_t p &= \partial_t \left(u_x u_t\right) &(8)\\
&= u_{xt} u_t + u_x u_{tt} &(9)\\
&= u_{xt} u_t + c^2 u_x u_{xx} &(10)\\
&= \partial_x \frac{1}{2}\left(u_t^2 + c^2 u_x^2\right) &(11)\\
&= e_x. &(12)
\end{aligned}$$

La loi de conservation peut donc s'écrire

$$p_t - e_x = 0. \tag{13}$$

(c) Les deux lois de conservation s'écrivent donc

$$\begin{cases} e_t - c^2 p_x &= 0,\\ p_t - e_x &= 0. \end{cases} \tag{14}$$

En dérivant la première équation par rapport à t et la seconde par rapport à x, le système devient

$$\begin{cases} e_{tt} - c^2 p_{xt} &= 0,\\ p_{tx} - e_{xx} &= 0. \end{cases} \tag{15}$$

L'équation d'onde pour e est finalement obtenue en substituant p_{xt} dans la première équation, *i.e.*

$$e_{tt} - c^2 e_{xx} = 0. \tag{16}$$

(d) Tenant compte des conditions aux limites, la solution générale est, après développements,

$$p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\omega_n x)\Big(A_n \sin(c\omega_n t) + B_n \cos(c\omega_n t)\Big), \tag{17}$$

avec $\omega_n = n\pi$.

(e) Si f_{n-1} vérifie l'équation d'ondes ($\diamond$) alors f_n est une quantité conservée, comme démontré à la première sous-question. De plus f_n vérifie aussi l'équation d'ondes, comme démontré à la troisième sous-question. Dès lors, puisque f_0 vérifie l'équation d'ondes, alors par récurrence, tous les f_n vérifient l'équation d'ondes et tous les f_n sont des quantités conservées.

Question II (10 Points)

Considérer l'équation d'onde amortie unidimensionnelle

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + r u_t = 0, \tag{$\diamond$}$$

où c est une constante quelconque et r est une constante positive. Une solution numérique pour cette équation pour être calculée en utilisant les approximations par différences finies

$$u_{tt} \approx \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2}, \qquad u_{xx} \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad \text{et} \quad u_t \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t},$$

où Δt et Δx sont respectivement un pas spatial et un pas temporel et où $u_j^n \triangleq u(j\Delta x, n\Delta t)$.
Étudier la stabilité au sens de Von Neumann de cette solution numérique en suivant les étapes ci-dessous.

(a) (20%) Exprimer l'équation de mise à jour en fonction de $\alpha \triangleq c^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$ et $\beta \triangleq \frac{r\Delta t}{2}$. Le schéma numérique est-il implicite ou explicite ?

(b) (40%) Montrer que les modes d'erreurs $\hat{\epsilon}_n \triangleq \hat{\epsilon}(k, n\Delta t)$ où k est le nombre d'onde du mode d'erreur considéré, vérifient

$$\hat{\epsilon}_{n+1} - 2\frac{\left(1 - 2\alpha \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}\right)}{1+\beta}\hat{\epsilon}_n + \frac{1-\beta}{1+\beta}\hat{\epsilon}^{n-1} = 0.$$

(c) (30%) Donner le critère de stabilité sur α et β.
Indice : Les racines de l'équation

$$x^2 + 2bx + c = 0, \quad \text{où} \quad b, c \in \mathbb{R},$$

sont de module inférieur ou égal à 1 si et seulement si

$$|c| \le 1 \quad \text{et} \quad |b| \le \frac{1}{2}(c+1).$$

(d) (10%) En se basant sur le résultat de la sous-question précédente, expliquer l'effet de la dissipation sur la stabilité numérique.

Solution

(a) L'équation de mise à jour est

$$(1+\beta)u_j^{n+1} = \alpha\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) + 2(1-\alpha)u_j^n - (1-\beta)u_j^{n-1}, \tag{18}$$

le schéma est donc explicite.

(b) L'amplitude de l'erreur $\hat{\epsilon}_n(k)$ à la fréquence k et au pas de temps n vérifie

$$(1+\beta)\hat{\epsilon}_{n+1} = \alpha\hat{\epsilon}_n\left(\exp(ik\Delta x) + \exp(-ik\Delta x)\right) + 2(1-\alpha)\hat{\epsilon}_n - (1-\beta)\hat{\epsilon}^{n-1} \tag{19}$$

$$\Rightarrow (1+\beta)\hat{\epsilon}_{n+1} = \left(\alpha(2\cos k\Delta x - 2) + 2\right)\hat{\epsilon}_n - (1-\beta)\hat{\epsilon}^{n-1} \tag{20}$$

$$\Rightarrow (1+\beta)\hat{\epsilon}_{n+1} = 2\left(1 - 2\alpha\sin^2(k\Delta x/2)\right)\hat{\epsilon}_n - (1-\beta)\hat{\epsilon}^{n-1} \tag{21}$$

$$\Rightarrow \hat{\epsilon}_{n+1} = 2\frac{\left(1 - 2\alpha\sin^2(k\Delta x/2)\right)}{1+\beta}\hat{\epsilon}_n - \frac{1-\beta}{1+\beta}\hat{\epsilon}^{n-1} \tag{22}$$

ou encore

$$\hat{\epsilon}_{n+1} - 2\frac{\left(1 - 2\alpha\sin^2(k\Delta x/2)\right)}{1+\beta}\hat{\epsilon}_n + \frac{1-\beta}{1+\beta}\hat{\epsilon}^{n-1} = 0.$$

(c) La condition $|c| \leq 1$ est toujours satisfaite puisque dans ce cas, $c = \frac{1-\beta}{1+\beta}$ et $\beta \geq 0$. La deuxième condition donne

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\left(1-2\alpha\sin^2\left(k\Delta x/2\right)\right)}{1+\beta}\right| &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}+1\right) && (23)\\
\Rightarrow \left|\left(1-2\alpha\sin^2\left(k\Delta x/2\right)\right)\right| &\leq 1 && (24)\\
\Rightarrow -1 \leq 1-2\alpha\sin^2\left(k\Delta x/2\right) &\leq 1 && (25)\\
\Rightarrow -2 \leq -2\alpha\sin^2\left(k\Delta x/2\right) &\leq 0 && (26)\\
\Rightarrow \alpha &\leq 1. && (27)
\end{aligned}$$

(d) La dissipation ne modifie pas le condition de stabilité de Von Neumann pour ce schéma de différences finies.

Question III (10 Points)

On considère les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & u_t + (x+1)u_x = 0, \\ \text{(b)} & u_t + (x+u)u_x = 0, \end{array}$$

définies pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$ et assorties chacune de la condition initiale $u(x,0) = x+2$.

Pour les cas (a) (40%) et (b) (60%),
- classifier l'équation (linéarité, homogénéité, ordre),
- déterminer la solution et l'équation des lignes caractéristiques,
- esquisser les lignes caractéristiques pour $x(0) = -2, -1, 0$.

Solution

(a) L'équation à résoudre devient

$$u_t + (x+1)\ u_x = 0. \tag{28}$$

EDP linéaire homogène d'ordre 1.
A partir de la définition de la dérivée totale

$$\frac{d}{dt}[u(x(t),t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\,\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{29}$$

l'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente comme l'équation différentielle ordinaire ci-dessous

$$\frac{d}{dt}[u(x(t),t)] = 0, \tag{30}$$

en considérant les dérivées partielles u_t et u_x définies sur les lignes $x(t)$. Dès lors, la solution est constante le long de ces lignes et en définissant C_1 comme une constante telle que $C_1 \in \mathbb{R}$, on a

$$u(x(t),t) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

Par conséquent, les lignes caractéristiques sont données par la seconde équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = x+1, \tag{32}$$

$$\Rightarrow \qquad \ln|x+1| = t + C_2, \tag{33}$$

$$\Rightarrow \qquad |x+1| = K\exp(t), \quad K \in \mathbb{R}_0^+ \tag{34}$$

$$\Rightarrow \qquad x(t) = -1 \pm K\exp(t). \tag{35}$$

En utilisant les conditions initiales, on détermine la première constante

$$u(x(t),t) = C_1 = u(x(0),0) = \phi(x_0). \tag{36}$$

La deuxième constante est déterminée par l'équation de la ligne caractéristique en $t=0$,

$$x(0) = x_0 = -1 + K, \tag{37}$$

et la constante K

$$K = \pm(x_0 + 1). \tag{38}$$

Les lignes caractéristiques deviennent

$$x(t) = -1 \pm [\pm(x_0 + 1)] \exp(t), \tag{39}$$

$$\Rightarrow \qquad x(t) = -1 + (x_0 + 1) \exp(t), \tag{40}$$

$$\Rightarrow \qquad x_0 = (x + 1) \exp(-t) - 1. \tag{41}$$

Finalement, la solution est

$$u(x,t) = \phi(x_0) = (x + 1) \exp(-t) + 1. \tag{42}$$

Pour dessiner les lignes caractéristiques, l'Eq.(40) peut être utilisée pour différents x_0.

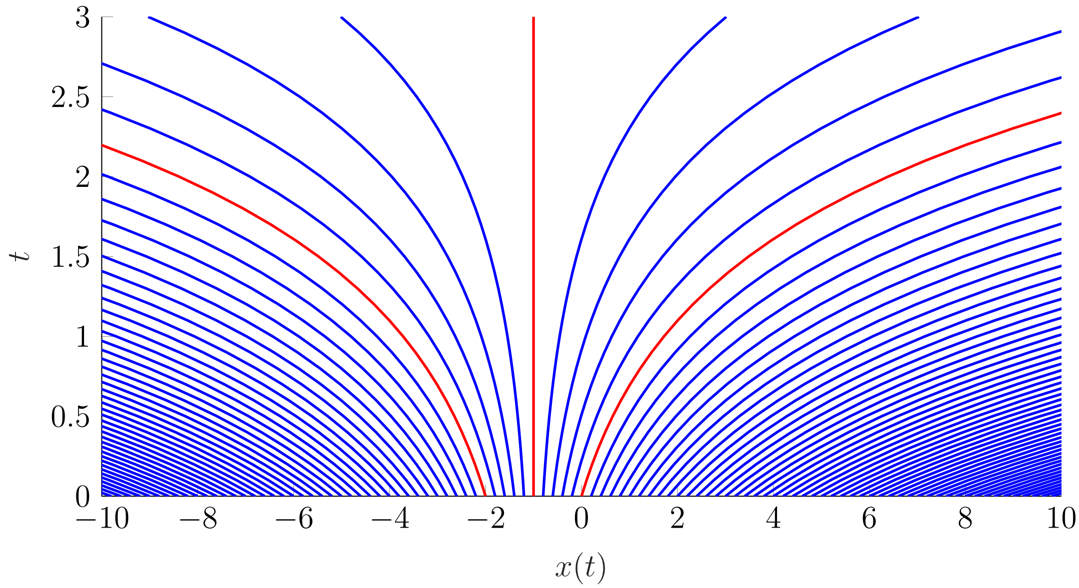

FIGURE 1 – Les caractéristiques demandées sont dessinées en rouge et les autres en bleu.

(b) L'équation à résoudre devient

$$u_t + (x + u)\, u_x = 0. \tag{43}$$

EDP non-linéaire et homogène d'ordre 1.
A partir de la définition de la dérivée totale

$$\frac{d}{dt}[u(x(t),t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\,\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{44}$$

l'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente comme l'équation différentielle ordinaire ci-dessous

$$\frac{d}{dt}[u(x(t),t)] = 0, \tag{45}$$

en considérant les dérivées partielles u_t et u_x définies sur les lignes $x(t)$. Dès lors, la solution est constante le long de ces lignes et en définissant C_1 comme une constante telle que $C_1 \in \mathbb{R}$, on a

$$u(x(t),t) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \tag{46}$$

Par conséquent, les lignes caractéristiques sont données par la seconde équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = x + u(x(t), t), \tag{47}$$

$$\Rightarrow \qquad \ln|x + C_1| = t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{48}$$

$$\Rightarrow \qquad x(t) = \pm K \exp(t) - C_1, \quad K \in \mathbb{R}_0^+. \tag{49}$$

En utilisant les conditions initiales, on détermine la première constante

$$u(x(t), t) = C_1 = u(x(0), 0) = \phi(x_0). \tag{50}$$

L'équation de la ligne caractéristique devient

$$x(t) = \pm K \exp(t) - \phi(x_0). \tag{51}$$

La deuxième constante est déterminée par l'équation de la ligne caractéristique en $t = 0$,

$$x(0) = x_0 = \pm K - \phi(x_0), \tag{52}$$

$$\Rightarrow \qquad K = \pm(x_0 + \phi(x_0)). \tag{53}$$

Etant donné que la condition initiale $\phi(x_0) = x_0 + 2$ est remplacée dans la constante K

$$K = \pm 2(x_0 + 1), \tag{54}$$

les lignes caractéristiques deviennent

$$x(t) = 2(x_0 + 1)\exp(t) - x_0 - 2, \tag{55}$$

$$\Rightarrow \qquad x_0 = \frac{x - 2(\exp(t) - 1)}{2\exp(t) - 1}. \tag{56}$$

Finalement, la solution est

$$u(x, t) = \phi(x_0) = \frac{x - 2(\exp(t) - 1)}{2\exp(t) - 1} + 2, \tag{57}$$

$$= \frac{x + 1}{2\exp(t) - 1} + 1. \tag{58}$$

Pour dessiner les lignes caractéristiques, l'Eq.(55) peut être utilisée pour différents x_0.

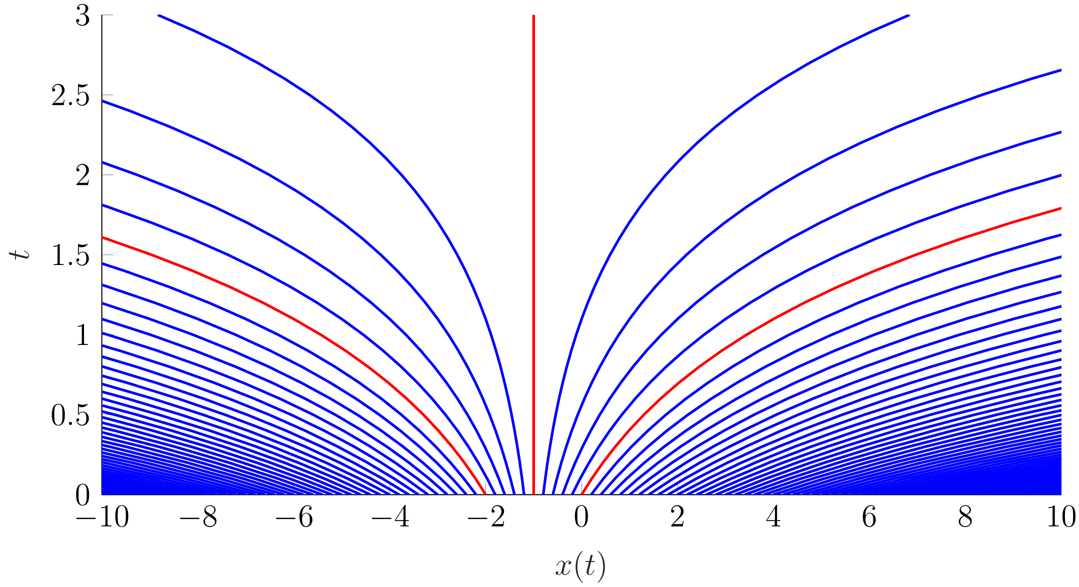

FIGURE 2 – Les caractéristiques demandées sont dessinées en rouge et les autres en bleu.