Bachelier ingénieur civil
Mathématiques appliquées - MATH-0504
Examen d'exercices

18 Janvier 2022

Seules les réponses rédigées sur les pages numérotées seront prises en considération. Il est interdit de dégrafer les feuilles.

Remarques :

— *Lisez attentivement les énoncés. Plus d'un élément peut être demandé dans une sous-question.*
— *Essayez* ***toutes les sous-questions****, beaucoup sont indépendantes.*
— ***Justifiez*** *vos développements et* ***expliquez*** *vos démarches.*
— *Les calculatrices, smartphones et montres connectées sont interdites.*
— *L'examen dure* ***deux heures****.*

Exercices

E1 : Von Neumann (10 Points)

Considérer l'équation de diffusion

$$u_t - u_{xx} = 0,$$

et appliquer le schéma de Crank-Nicolson avec les discrétisations suivantes

$$u_t \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t},$$
$$u_{xx} \approx \theta\, \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)\, \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2},$$

avec $\theta \in [0, 1]$.

(a) (2 Points) Ce schéma est-il explicite ou implicite ? Justifier.

(b) (6 Points) Etablir le critère de stabilité en utilisant une analyse de Von Neumann.

(c) (2 Points) Discuter la valeur du paramètre θ et son effet sur la stabilité de ce schéma.

Solution :

E2 : Green (10 Points)

Considérer l'équation de Black-Scholes

$$u_t + \frac{\alpha^2}{2} x^2 u_{xx} + \beta x u_x - \beta u = 0 \qquad (\diamond)$$

où $x \in \mathbb{R}$ et $0 \leq t \leq T$ et avec α, β qui sont des constantes quelconques et T une constante positive.

(a) (1 Point) Classifier l'Éq.($\diamond$) en justifiant brièvement. En particulier, est-elle homogène ? Linéaire ? Quel est l'ordre de cette équation ?

(b) (2 Points) Effectuer le changement de variables $x = \exp(X)$ et $\tau = (T - t)$, tels que

$$u(x,t) \triangleq U(X = \ln x, \tau = T - t),$$

montrer que l'équation satisfaite par la fonction $U(X, \tau)$ est donnée par

$$U_\tau = \frac{\alpha^2}{2} U_{XX} + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{2}\right) U_X - \beta U.$$

(c) (2 Points) Poser

$$U(X, \tau) = \exp(\lambda X + \mu \tau)\, G(X, \tau),$$

et déterminer la nouvelle équation à résoudre.

(d) (2 Points) Ecrire les conditions pour que $G(X, \tau)$ soit solution d'une équation de diffusion pure et homogène de coefficient de diffusion b ? Déterminer la valeur de λ et montrer la validité de la relation $\mu = -\frac{1}{2}[\alpha(1 - \lambda)]^2$.

(e) (3 Points) En considérant la condition finale

$$u(x, T) = u_T(x), \qquad (\dagger)$$

avec $u_T(x)$ une fonction dépendant de x, on obtient

$$G(X, 0) = u_T(e^X)\ \exp(-\lambda X).$$

Dans le cas où $G(X, \tau)$ est solution de l'équation de diffusion pure et homogène, montrer que $u(x, t)$ est donné par l'expression

$$u(x,t) = \frac{\exp(\mu(T-t))}{\sqrt{2\pi\alpha^2(T-t)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\alpha^2(T-t)}\right) u_T(xe^\xi) \exp(-\lambda\xi)\, d\xi.$$

Rappel : La fonction de Green pour l'équation de diffusion unidimensionnelle est donnée par

$$S(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi bt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4bt}\right),$$

avec b le coefficient de diffusion.

Solution :

(a) /

(b) En appliquant les changements de variables, les dérivées deviennent

$$\partial_t = \frac{d\tau}{dt}\,\partial_\tau = -\partial_\tau, \tag{1}$$
$$\partial_x = \frac{dX}{dx}\,\partial_X = e^{-X}\,\partial_X, \tag{2}$$
$$\partial_{xx} = \partial_x(\partial_x) = -e^{-2X}\partial_X + e^{-2X}\partial_{XX}. \tag{3}$$

En remplaçant ces expressions dans ⋄, on obtient bien

$$U_\tau = \frac{\alpha^2}{2}U_{XX} + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{2}\right)U_X - \beta U.$$

(c) Si on applique la nouvelle expression de $U(X,\tau)$ aux dérivées, et si on pose $\kappa = e^{\lambda X + \mu\tau}$,

$$U_\tau = \kappa(\mu G + G_\tau), \tag{4}$$
$$U_X = \kappa(\lambda G + G_X), \tag{5}$$
$$U_{XX} = \kappa(\lambda^2 G + 2\lambda G_X + G_{XX}) \tag{6}$$

L'équation devient donc

$$G_\tau = \frac{\alpha^2}{2}G_{XX} + \left(\lambda\alpha^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{2}\right)G_X + \left[-\mu + \frac{\alpha^2\lambda^2}{2} + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{2}\right)\lambda - \beta\right]G = 0. \tag{7}$$

(d) Pour retrouver l'équation de diffusion, il est nécessaire d'imposer les deux conditions ci-dessous :

$$\lambda\alpha^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{2} = 0, \tag{8}$$

$$-\mu + \frac{\alpha^2\lambda^2}{2} + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{2}\right)\lambda - \beta = 0. \tag{9}$$

Celles-ci nous donnent les valeurs de λ et μ

$$\lambda = \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{\alpha^2}\right), \tag{10}$$

$$\mu = -\frac{1}{2}[\alpha(1-\lambda)]^2 = -\frac{1}{8\alpha^2}(\alpha^2 + 2\beta). \tag{11}$$

Or l'Equation (11) vérifie la relation Equation (9).
Dès lors, la fonction $G(X,\tau)$ vérifie l'équation de diffusion

$$G_\tau = b\,G_{XX}, \tag{12}$$

avec $b = \frac{\alpha^2}{2}$.

(e) En utilisant le principe de superposition, la solution $G(X,\tau)$ de l'équation de diffusion est

$$G(X,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2\tau}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(X-Y)^2}{2\alpha^2\tau}\right) u_T(e^Y) e^{-\lambda Y} dY. \tag{13}$$

En effectuant le changement de variable $\xi = Y - X$, les bornes d'intégration restent inchangées et on obtient

$$G(X,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2\tau}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\alpha^2\tau}\right) u_T(e^{X+\xi}) e^{-\lambda(X+\xi)} d\xi. \tag{14}$$

La solution générale étant exprimée comme suit :

$$U(X,\tau) = \exp(\lambda X + \mu\tau)\, G(X,\tau).$$

Dès lors, en appliquant l'expression ci-dessus et en remplaçant respectivement X et τ par x et t, la relation demandée est bien retrouvée

$$u(x,t) = \frac{\exp(\mu(T-t))}{\sqrt{2\pi\alpha^2(T-t)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\alpha^2(T-t)}\right) u_T(xe^{\xi}) \exp(-\lambda\xi)\, d\xi.$$

E3 : Séparation de variables (10 Points)

Considérer l'équation de Laplace écrantée

$$u_{xx} + u_{yy} - k^2 u = 0 \tag{$\diamond$}$$

où k est une constante strictement positive.

(a) (2 Points) Classifier l'Éq.($\diamond$) en justifiant brièvement. En particulier, est-elle homogène ? linéaire ? parabolique ? elliptique ? hyperbolique ? Quel est l'ordre de cette équation ?

(b) (5.5 Points) Considérer maintenant le domaine $(x, y) \in [0, l] \times [0, l]$ et les conditions de bord

$$\begin{cases} u(l, y) & = 0 & \forall y \in [0, l], \\ u(0, y) & = 0 & \forall y \in [0, l], \\ u(x, l) & = 0 & \forall x \in [0, l], \\ u(x, 0) & = f(x) & \forall x \in [0, l]. \end{cases}$$

Montrer, en justifiant votre démarche, que la solution générale de l'Éq.($\diamond$) sur ce domaine avec ces conditions de bord peut s'écrire sous la forme

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_{x,n} x) \frac{\sinh(k_{y,n}(l - y))}{\sinh(k_{y,n} l)}$$

avec

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(n\pi \frac{x}{l})\, dx.$$

Donner l'expression de $k_{x,n}$ et $k_{y,n}$ en fonction de k et l.
Indice : L'identité trigonométrique $\sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b = \sinh(a - b)$ peut s'avérer utile.

(c) (2.5 Points) Montrer que lorsque

$$f(x) = (1 - \frac{x}{l})\frac{x}{l},$$

les constantes A_n sont données par

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{8}{n^3 \pi^3} & \text{si } n \text{ est impair}, \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair}. \end{cases}$$

Indice : L'identité

$$2 \int_0^1 (1 - x')x' \sin(n\pi x')\, dx' = \frac{-4}{n\pi} \int_0^1 x' \cos(n\pi x')\, dx'$$

peut être utilisée sans démonstration pour raccourcir les calculs.

Solution :

(a) L'opérateur différentiel associé à cette équation est $\mathcal{L} \triangleq \partial_{xx} + \partial_{yy} - k^2$. L'équation est donc
- homogène ($\mathcal{L}(u) = 0$),
- linéaire ($\mathcal{L}(\alpha u + \beta v) = \alpha\mathcal{L}(u) + \beta\mathcal{L}(v)$),
- du second ordre spatial (∂_{xx}, ∂_{yy}),
- elliptique.

En effet, elle peut s'écrire

$$\begin{aligned} Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F\,u =& G \qquad (15)\\ 1u_{xx} + 0\;u_{xy} + 1\;u_{yy} + 0\;u_x + 0\;u_y - k^2 u =& 0 \qquad (16)\end{aligned}$$

en conséquence

$$B^2 - 4AC = -4 < 0. \qquad (17)$$

(b) En utilisant la décomposition $u = X(x)Y(y)$, l'équation s'écrit

$$\begin{aligned} X''Y + XY'' - k^2XY = 0 \qquad (18)\\ \Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = k^2. \qquad (19)\end{aligned}$$

Le premier terme ne dépend que de la variable spatiale x alors que le deuxième terme ne dépend que de la variable spatiale y. Chacun de ces deux termes doit donc être égal à une constante (λ_x, λ_y) dont la somme vaut k^2, *i.e*

$$X'' - \lambda_x X = 0, \quad Y'' - \lambda_y Y = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda_x + \lambda_y = k^2. \qquad (20)$$

Dépendance spatiale x En fonction du signe de λ_x, trois types de solutions apparaissent, *i.e*

$$\begin{aligned} &\text{si } \lambda_x = 0 && \Rightarrow X = A_x x + B_x, && (21)\\ &\text{si } \lambda_x = k_x^2 > 0 && \Rightarrow X = C_x \cosh(k_x x) + D_x \sinh(k_x x), && (22)\\ &\text{si } \lambda_x = -k_x^2 < 0 && \Rightarrow X = E_x \cos(k_x x) + F_x \sin(k_x x). && (23)\end{aligned}$$

Dépendance spatiale y En fonction du signe de λ_y, trois types de solutions apparaissent, *i.e*

$$\begin{aligned} &\text{si } \lambda_y = 0 && \Rightarrow Y = A_y y + B_y, && (24)\\ &\text{si } \lambda_y = k_y^2 > 0 && \Rightarrow Y = C_y \cosh(k_y y) + D_y \sinh(k_y y), && (25)\\ &\text{si } \lambda_y = -k_y^2 < 0 && \Rightarrow Y = E_y \cos(k_y y) + F_y \sin(k_y y). && (26)\end{aligned}$$

Les conditions de bord homogènes donnent des conditions à appliquer sur chacune des parties spatiales, *i.e.*

$$\begin{cases} u(l,y) &= X(l)Y(y) &= 0,\ \forall y \Rightarrow X(l) &= 0,\\ u(0,y) &= X(0)Y(y) &= 0,\ \forall y \Rightarrow X(0) &= 0,\\ u(x,l) &= X(x)Y(l) &= 0,\ \forall x \Rightarrow Y(l) &= 0.\end{cases}$$

Avec ces conditions, seul le cas $\lambda_x < 0$ conduit à des solutions non nulles

$$\begin{cases} X(0) &= 0 \quad \Rightarrow \quad E_x &= 0\\ X(l) &= 0 \quad \Rightarrow \quad F_x \sin(k_x l) &= 0\end{cases} \qquad (27)$$

lorsque

$$\sin(k_x l) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{x,n} = \frac{n\pi}{l}, \text{ with } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{28}$$

Les valeurs propres spatiales en x sont donc données par $\lambda_{x,n} = -k_{x,n}^2 = -(\frac{n\pi}{l})^2$ et les fonctions propres spatiales associées sont donc

$$X_n(x) = F_{x,n} \sin(k_{x,n} x) = F_{x,n} \sin(n\pi \frac{x}{l}), \ \ \forall n = 1, 2, 3, ... \tag{29}$$

Les valeurs propres spatiales en y correspondantes sont données par $\lambda_{y,n} = k^2 - \lambda_{x,n} = k^2 + k_{x,n}^2 = k^2 + (\frac{n\pi}{l})^2 > 0$ et les seules fonctions propres spatiales en y à garder sont donc

$$Y_n(y) = C_{y,n} \cosh(k_{y,n} y) + D_{y,n} \sinh(k_{y,n} y) \tag{30}$$

avec $k_{y,n} = \sqrt{k^2 + k_{x,n}^2} = \sqrt{k^2 + (\frac{n\pi}{l})^2}$.
La condition de bord en $y = l$ permet de déterminer une constante supplémentaire, *i.e*

$$Y_n(l) = 0 \Rightarrow C_{y,n} \cosh(k_{y,n} l) + D_{y,n} \sinh(k_{y,n} l) = 0 \Rightarrow D_{y,n} = -C_{y,n} \frac{\cosh(k_{y,n} l)}{\sinh(k_{y,n} l)} \tag{31}$$

de sorte que les fonctions propres spatiales en y sont finalement

$$Y_n(y) = C_{y,n} \cosh(k_{y,n} y) + D_{y,n} \sinh(k_{y,n} y) \tag{32}$$

$$Y_n(y) = C_{y,n} \cosh(k_{y,n} y) - C_{y,n} \frac{\cosh(k_{y,n} l)}{\sinh(k_{y,n} l)} \sinh(k_{y,n} y) \tag{33}$$

$$Y_n(y) = \frac{C_{y,n}}{\sinh(k_{y,n} l)} \left(\cosh(k_{y,n} y) \sinh(k_{y,n} l) - \cosh(k_{y,n} l) \sinh(k_{y,n} y)\right) \tag{34}$$

$$Y_n(y) = -\frac{C_{y,n}}{\sinh(k_{y,n} l)} \left(\sinh(k_{y,n} y) \cosh(k_{y,n} l) - \cosh(k_{y,n} y) \sinh(k_{y,n} l)\right) \tag{35}$$

$$Y_n(y) = C'_{y,n} \sinh(k_{y,n}(y - l)). \tag{36}$$

Par linéarité, la solution la plus générale qui vérifie les conditions homogènes est donc

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{x,n} \sin(k_{x,n} x) C'_{y,n} \sinh(k_{y,n}(y - l)) \tag{37}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_{x,n} x) \frac{\sinh(k_{y,n}(l - y))}{\sinh(k_{y,n} l)}. \tag{38}$$

avec $k_{x,n} = \frac{n\pi}{l}$ et $k_{y,n} = \sqrt{k^2 + (\frac{n\pi}{l})^2}$.
L'application de la condition limite non homogène s'écrit donc

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_{x,n} x) \tag{39}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi \frac{x}{l}). \tag{40}$$

Le membre de droite étant une série de Fourier en sinus, les coefficients A_n peuvent être déterminés par la formule

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(n\pi\frac{x}{l})\,dx \tag{41}$$

qui résulte de l'orthogonalité des fonctions de base $\sin(n\pi\frac{x}{l})$.

(c) En utilisant le changement de variable $x' = x/l$, l'intégrale s'écrit

$$A_n = 2\int_0^1 (1-x')x'\sin(n\pi x')\,dx'. \tag{42}$$

L'identité fournie donne ensuite

$$A_n = \frac{-4}{n\pi}\int_0^1 x'\cos(n\pi x')\,dx'. \tag{43}$$

En utilisant l'intégration par parties, les constantes sont données par

$$\begin{aligned}
\frac{n\pi}{-4}A_n &= \left[x'\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(n\pi x')}{n\pi}\,dx' && (44)\\
&= -\int_0^1 \frac{\sin(n\pi x')}{n\pi}\,dx' && (45)\\
&= -\frac{1}{n\pi}\left[-\frac{\cos(n\pi x')}{n\pi}\right]_0^1 && (46)\\
&= \frac{1}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi x')\right]_0^1 && (47)\\
&= \frac{1}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi)-1\right) && (48)
\end{aligned}$$

et finalement

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{8}{n^3\pi^3} & \text{si } n \text{ est impair,}\\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.}\end{cases} \tag{49}$$