Théorie

T1 : Définitions (4 Points)

Définir les concepts suivants :

— une onde de raréfaction (ou d'expansion) ;
— une onde de choc ;
— une solution faible d'une équation aux dérivées partielles ;
— le sous-espace de Krylov $\mathcal{K}^n(A, b)$.

T2 : Modélisation avec des équations aux dérivées partielles (4 Points)

Chaque situation décrite ci-dessous peut-être modélisée grâce à une équation aux dérivées partielles. On vous demande de décrire la ou les condition(s) limite(s) correspondantes à chaque problème, de donner le nom du type de condition(s) limite(s) utilisée(s) et d'indiquer s'il s'agit de condition(s) limite(s) homogène(s) ou non-homogène(s) :

— modélisation des vibrations transversales d'une corde de violon, supposée parfaitement élastique ;
— modélisation des vibrations transversales d'une corde parfaitement élastique dont une extrémité est fixe et l'autre est attachée à un ressort ;
— modélisation des vibrations transversales d'une corde parfaitement élastique dont une extrémité est fixe et le déplacement de l'autre est imposé ;
— modélisation de la température d'un domaine lui-même plongé dans un réservoir infini à température constante, non nulle.

Veuillez définir précisément toutes les notations que vous introduisez.

T3 : Classification des équations aux dérivées partielles (4 Points)

On vous demande de donner un exemple d'équation aux dérivées partielles correspondant à chacun des types suivants :

— une équation de transport linéaire, non homogène ;
— une équation non-linéaire, du second ordre, homogène ;
— une équation parabolique ;
— une équation de Poisson.

Veuillez définir précisément chaque notation que vous utilisez (ex. coefficient numérique constant, fonction inconnue, variable indépendante, ...).

T4 : Notion de stabilité (3 Points)

On vous demande d'établir un lien entre l'horizon temporel sur lequel des prévisions météorologiques sont fiables et la notion de “stabilité” nécessaire à l'obtention d'un problème bien posé.

T5 : Fonctions harmoniques (4 Points)

Une fonction harmonique en 1D vérifie-t-elle
- le principe du maximum ;
- la propriété de la valeur moyenne ?

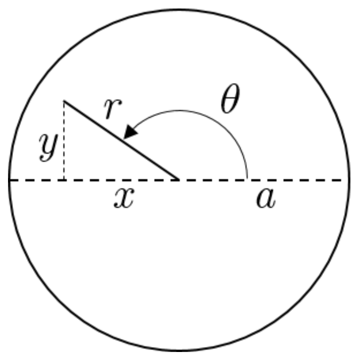
Expliquer.

T6 : Equation de Laplace (4 Points)

On considère le problème de Dirichlet suivant, dans un domaine constitué d'un disque de rayon a et centré sur l'origine :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ pour } x^2 + y^2 < a^2$$
$$u = h(\theta) \text{ pour } x^2 + y^2 = a^2$$

où $h(\theta)$ désigne une fonction donnée de la coordonnée polaire θ :



La solution complète de ce problème s'écrit :

$$u = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \cos n\phi \; d\phi$$
$$B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \sin n\phi \; d\phi$$

On vous demande de
- donner l'expression de la solution à l'origine ($x = y = 0$) ;
- d'interpréter votre résultat ;
- d'expliquer les implications de ce résultat.

T7 : Caractéristiques (4 Points)

On considère l'équation aux dérivées partielles $u_t + uu_x = 0$. Pour chacune des propositions ci-dessous, indiquer si elle est correcte ou pas et justifier brièvement :

— Les caractéristiques sont des droites ;
— La solution est constante sur chacune des caractéristiques ;
— Une caractéristique unique passe en chaque point du plan (x, t).

T8 : Méthodes de sous-espaces (4 Points)

L'itération du gradient conjugué pour le système linéaire $Ax = b$ s'écrit comme suit :

$x_0 = 0, r_0 = b, p_0 = r_0$
for $n = 1, 2, 3, \ldots$ **do**

$\alpha_n = \dfrac{r_{n-1}^T r_{n-1}}{p_{n-1}^T A p_{n-1}}$	longueur du pas
$x_n = x_{n-1} + \alpha_n p_{n-1}$	solution approchée
$r_n = r_{n-1} - \alpha_n A p_{n-1}$	résidu
$\beta_n = \dfrac{r_n^T r_n}{r_{n-1}^T r_{n-1}}$	
$p_n = r_n + \beta_n p_{n-1}$	direction de recherche

end

On vous demande de montrer que la solution approchée x_n appartient au sous-espace de Krylov $\mathcal{K}^n(A, b)$.

T9 : Approximation d'une matrice (4 Points)

On considère une matrice $A \in R^{m \times n}$ de rang r. On vous demande
— d'écrire la meilleure approximation A_k de rang $k \leq r$ de cette matrice, telle que $||A - A_k||_2 = \min_{\text{rang}(B)=k} ||A - B||$;
— de donner la valeur de $||A - A_k||_2$.

Définir très précisément toutes les notations que vous utilisez dans votre réponse. S'il s'agit de matrices ou de vecteurs, précisez systématiquement leurs dimensions.