Bachelier ingénieur civil
Mathématiques appliquées - MATH-0504
Examen d'exercices

22 Janvier 2020

Remarques :
— *Lisez attentivement les énoncés. Plus d'un élément peut être demandé dans une sous-question.*
— *Essayez* ***toutes les sous-questions****, beaucoup sont indépendantes.*
— ***Justifiez*** *vos développements et* ***expliquez*** *vos démarches.*
— *Les calculatrices sont interdites.*
— *L'examen dure* ***deux heures****.*

Question I (10 Points)

Considérer l'équation d'advection-diffusion unidimensionnelle

$$u_t + wu_x - bu_{xx} = 0 \tag{$\diamond$}$$

où w est une constante quelconque et b est une constante positive.

(a) (2 Points) Classifier l'Éq.($\diamond$) en justifiant brièvement. En particulier, est-elle homogène ? linéaire ? parabolique ? elliptique ? hyperbolique ? Quel est l'ordre de cette équation ?

(b) (6 Points) En considérant la condition initiale

$$u(x,0) = M_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d} \exp\left(-\left[\frac{x}{d}\right]^2\right), \tag{$\dagger$}$$

où M_0 et d sont des constantes strictement positives, donner la solution de l'Éq.($\diamond$) dans l'espace $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,\infty[$ en fonction de M_0 et $\sigma(t) \triangleq \sqrt{d^2 + 4bt}$.

Rappel : La fonction de Green pour l'équation de diffusion unidimensionnelle est donnée par

$$S(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi bt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4bt}\right).$$

Indice : Utiliser le changement de variable $y = x - wt$ et $z = t$.

Indice : L'identité suivante peut s'avérer utile

$$-\frac{(y-\zeta)^2}{4bz} - \left(\frac{\zeta}{d}\right)^2 = -\alpha\,(\zeta-\gamma)^2 - \beta$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{4bz}\left(\frac{\sigma(z)}{d}\right)^2, \quad \gamma = \left(\frac{d}{\sigma(z)}\right)^2 y \quad \text{et} \quad \beta = \left(\frac{y}{\sigma(z)}\right)^2.$$

Indice : L'intégrale de Poisson

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\alpha\zeta^2\right) d\zeta = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

peut s'avérer utile.

(c) (2 Points) Esquisser
— la solution initiale et la solution en $t = d/w$ lorsque $4bt/d^2 \lll 1$,
— la solution initiale et la solution en $t = d/w$ lorsque $4bt/d^2 \ggg 1$.

Solution :

(a) Cette equation est
- homogène,
- linéaire,
- du second ordre spatial et du premier ordre temporel,
- parabolique.

En effet, elle peut s'écrire

$$Au_{tt} + Bu_{tx} + Cu_{xx} + Du_t + Eu_x + Fu = G \tag{1}$$
$$0u_{tt} + 0\ u_{tx} - b\ u_{xx} + 1\ u_t + wu_x + 0\ u = 0 \tag{2}$$

en conséquence
$$B^2 - 4AC = 0. \tag{3}$$

(b) En utilisant le changement de variable $y = x - wt$, les opérateurs différentiels s'écrivent

$$\partial_x = \frac{\partial y}{\partial x}\,\partial_y + \frac{\partial z}{\partial x}\,\partial_z = \partial_y, \tag{4}$$
$$\partial_t = \frac{\partial y}{\partial t}\,\partial_y + \frac{\partial z}{\partial t}\,\partial_z = -w\,\partial_y + \partial_z. \tag{5}$$

Éq.($\diamond$) devient alors

$$-wu_y + u_z - bu_{yy} + wu_y = 0, \tag{6}$$

ou

$$u_z - bu_{yy} = 0. \tag{7}$$

La condition initiale devient

$$u(y, 0) = \phi(y) = M_0 \frac{1}{\sqrt{\pi} d} \exp - \left(\frac{y}{d}\right)^2. \tag{8}$$

En utilisant le principe de superposition, la solution générale de l'Éq.(7) est

$$
\begin{aligned}
u(y,z) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi bz}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left[\frac{y-\zeta}{\sqrt{4bz}}\right]^2\right) \phi(\zeta)\mathrm{d}\zeta, && (9)\\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi bz}} \frac{M_0}{\sqrt{\pi}d} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left[\frac{y-\zeta}{\sqrt{4bz}}\right]^2\right) \exp\left(-\left[\frac{\zeta}{d}\right]^2\right) \mathrm{d}\zeta, && (10)\\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi bz}} \frac{M_0}{\sqrt{\pi}d} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha\left[\zeta-\gamma\right]^2 - \beta\right) \mathrm{d}\zeta, && (11)\\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi bz}} \frac{M_0}{\sqrt{\pi}d} \exp\left(-\beta\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha\eta^2\right) \mathrm{d}\eta, && (12)\\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi bz}} \frac{M_0}{\sqrt{\pi}d} \exp\left(-\beta\right) \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, && (13)\\
&= M_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma(z)} \exp\left(-\left[\frac{y}{\sigma(z)}\right]^2\right), && (14)\\
&= M_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma(t)} \exp\left(-\left[\frac{x-wt}{\sigma(t)}\right]^2\right). && (15)
\end{aligned}
$$

(c) /

Question II (10 Points)

En mécanique quantique, l'état d'une particule est décrit par une fonction d'onde ψ. Cette fonction d'onde est à valeur complexe et est une fonction de la position et du temps, $\psi = \psi(\boldsymbol{x}, t)$. L'évolution de l'état ψ d'une particule de masse m_0 dans un puits de potentiel infini de domaine D satisfait le problème différentiel suivant

$$\begin{aligned}
i\hbar\, \psi_t(\boldsymbol{x}, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi(\boldsymbol{x}, t), && \boldsymbol{x} \in D, t \in]0, +\infty[, \\
\psi(\boldsymbol{x}, t) &= 0, && \boldsymbol{x} \in \partial D, t \in]0, +\infty[, \\
\psi(\boldsymbol{x}, 0) &= \Phi(\boldsymbol{x}), && \boldsymbol{x} \in D,
\end{aligned} \tag{$\diamond$}$$

avec $\hbar$ une constante réelle strictement positive (constante de Planck réduite), $i^2 = -1$, Δ l'opérateur Laplacien, ∂D la frontière de D et $\Phi(\boldsymbol{x})$ une condition initiale.
On considère un espace à deux dimensions spatiales décrites par les coordonnées cartésiennes x et y. On fixe également le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}$, avec a et b deux constantes réelles strictement positives. Le Laplacien s'exprime comme $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$. Dans ce cadre :

(a) (1 Point) Utiliser la séparation de variables $\psi(x, y, t) = \phi(x, y)T(t)$ pour obtenir les équations séparées suivantes, en justifiant,

$$i\hbar T' = ET, \tag{$\dagger$}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\phi = E\phi, \tag{$\ddagger$}$$

avec E une constante de séparation, que l'on supposera **réelle** et positive ($E \in \mathbb{R}^+$).

(b) (1 Point) Résoudre l'équation différentielle ordinaire ($\dagger$) pour $T(t)$.

(c) (2 Points) Utiliser la séparation de variables $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ dans l'équation ($\ddagger$) pour obtenir deux équations différentielles ordinaires. On peut supposer la nouvelle constante de séparation **réelle**. Exprimer les conditions aux limites associées à ces deux équations. Justifier.

(d) (4 Points) Résoudre les deux problèmes différentiels obtenus.

(e) (2 Points) En partant des solutions séparables, montrer que la solution la plus générale du problème aux conditions aux limites prend la forme suivante

$$\psi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \exp\left(-\frac{iE_{n,m}t}{\hbar}\right),$$

avec $E_{n,m} = E(n, m)$ une expression à déterminer, et les $A_{n,m}$ des constantes complexes. Justifier.

Solution :

(a) Introducing the separation of variables $\psi(x,y,t) = \phi(x,y)T(t)$ in equation ($\diamond$) yields

$$i\hbar\,\phi T' = -\frac{\hbar^2}{2m_0}T\Delta\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{i\hbar\,T'}{T} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Delta\phi}{\phi}. \tag{16}$$

The two sides of the last equation depend on different variables. They must therefore be constant. Let us denote this constant E, with $E \in \mathbb{R}^+$. The separated equations write

$$i\hbar T' = ET, \tag{$\dagger$}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\phi = E\phi. \tag{$\ddagger$}$$

(b) Equation ($\dagger$) can be directly solved by inspection. It gives $T(t) = A\exp(-iE\,t/\hbar)$, with $A \in \mathbb{C}$ an integration constant.

(c) Using the separation of variables $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$ in equation ($\ddagger$) leads to

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}(X''Y + XY'') = EXY \quad \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{X''}{X} = \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{Y''}{Y} + E. \tag{17}$$

The two sides of the last equation depend on different variables and must therefore be constant. Let us denote this constant E_x. Let us also introduce $E_y = E - E_x$. We have $E_x, E_y \in \mathbb{R}$. The separated equations write

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}X'' - E_x X = 0, \tag{18}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}Y'' - E_y Y = 0. \tag{19}$$

The boundary conditions lead immediately to

$$X(0) = X(a) = 0, \qquad \text{and} \qquad Y(0) = Y(b) = 0. \tag{20}$$

(d) The two problems are equivalent, let us focus on the problem for X first. Three cases are considered.
   — If $E_x = 0$, the general solution of the equation is $X(x) = Bx + C$, with $B, C \in \mathbb{C}$. The only possibility to match the boundary condition is to have $B = C = 0$, which does not lead to an interesting solution.
   — If $2m_0E_x/\hbar^2 = -\omega_x^2 < 0$, with $\omega_x \in \mathbb{R}_0^+$, the general solution is

$$X(x) = D\sinh(\omega_x x) + F\cosh(-\omega_x x), \tag{21}$$

   with $D, F \in \mathbb{C}$. The only possibility to match the boundary condition is to have $D = F = 0$, which does not lead to an interesting solution.
   — If $2m_0E_x/\hbar^2 = k_x^2 > 0$, with $k_x \in \mathbb{R}_0^+$, the general solution is

$$X(x) = G\sin(k_x x) + H\cos(k_x x), \tag{22}$$

   with $G, H \in \mathbb{C}$. The boundary condition $X(0) = 0$ implies $H = 0$, whereas the condition $X(a) = 0$ requires that $k_x a = n\pi$, with $n \in \mathbb{N}_0$ (the case $n = 0$ is rejected because it leads to $k_x = 0$ which is not under consideration). Therefore, for every $n \in \mathbb{N}_0$, the function

$$X(x) = G\sin(n\pi x/a), \quad \text{with} \quad E_x = \frac{k_x^2\hbar^2}{2m_0} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m_0a^2} \tag{23}$$

   is a solution to the separated problem for X.

Similarly, if we introduce $2m_0E_y/\hbar^2 = k_y^2$, with $k_y \in \mathbb{R}_0^+$, for every $m \in \mathbb{N}_0$, the function

$$Y(y) = J\sin(m\pi y/b), \quad \text{with} \quad E_y = \frac{k_y^2\hbar^2}{2m_0} = \frac{m^2\pi^2\hbar^2}{2m_0b^2} \tag{24}$$

is a solution to the separated problem for Y.

(e) Every product $\psi = XYT$ is a separable solution to the boundary value problem. The problem is linear so every linear combination of solutions is also a solution. Consequently, the most general solution to the initial problem in a two dimensional rectangular potential well writes

$$\psi(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m}\sin(n\pi x/a)\sin(m\pi y/b)\exp\left(-\frac{iE_{n,m}t}{\hbar}\right), \tag{25}$$

with

$$E_{n,m} = E_x + E_y = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m_0a^2} + \frac{m^2\pi^2\hbar^2}{2m_0b^2}, \tag{26}$$

and with $A_{n,m}$ complex coefficients to determine with the initial condition.

Question III (10 Points)

L'évolution de la densité du trafic routier u est régie par l'équation aux dérivées partielles non linéaire

$$u_t + (1-2u)u_x = 0 \quad \text{pour} \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[. \tag{$\star$}$$

La rencontre entre une circulation fluide et un embouteillage peut être décrite de manière simplifiée par la condition initiale suivante

$$u(x,0) = \begin{cases} \alpha & x < 1, \\ \dfrac{3}{4} & x \geq 1, \end{cases}$$

avec $0 \leq \alpha \leq 3/4$, α représentant la fluidité du trafic en amont. La circulation sera d'autant plus fluide que la valeur de ce paramètre est faible.

(a) (4 Points) Déteminer les équations des lignes caractéristiques et les solutions de ce problème selon leurs conditions initiales.

(b) (3 Points) Prouver que la vitesse de propagation du choc $s(t)$ est donnée par

$$s(t) = \frac{1}{4} - \alpha.$$

Pour cela, réaliser les étapes suivantes :

— Reformuler l'équation ($\star$) dans sa forme conservative.
Rappel : la forme conservative de l'équation

$$u_t + a(u)u_x = 0$$

s'écrit

$$u_t + [A(u)]_x = 0.$$

— Appliquer la formule de Rankine-Hugoniot donnée ci-dessous :

$$s(t) = \frac{A(u^+) - A(u^-)}{u^+ - u^-},$$

où u^- est la solution avant le choc et u^+ la solution après le choc.

(c) (0.5 Point) Donner l'équation de la ligne de choc.

(d) (1.5 Point) Esquisser les lignes caractéristiques avec ligne de choc pour $\alpha = 1/6$, $\alpha = 1/4$ et $\alpha = 1/2$.

(e) (1 Point) Donner une explication intuitive de la dépendance entre la vitesse du choc $s(t)$ et la fluidité du trafic en amont α.

Solution

(a) A partir de la définition de la dérivée totale,

$$\frac{d}{dt}[u(x(t),t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{27}$$

L'équation aux dérivées partielles peut s'écrire de façon équivalente comme l'équation différentielle ordinaire ci-dessous

$$\frac{d}{dt}[u(x(t),t)] = 0, \tag{28}$$

$$u(x(t),t) = C_1, \tag{29}$$

en considérant les dérivées partielles u_t et u_x définies sur les lignes $x(t)$ et en définissant C_1 comme une constante telle que $C_1 \in \mathbb{R}$. Par conséquent, les lignes caractéristiques sont données par la seconde équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = [1 - 2u(x(t),t)], \tag{30}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 1 - 2C_1, \tag{31}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = (1 - 2C_1)t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{32}$$

En utilisant les conditions initiales dans l'Eq.(29), on détermine la première constante

$$u(x(t),t) = C_1 = u(x(0),0) = \phi(x_0). \tag{33}$$

L'équation de la ligne caractéristique devient

$$x(t) = [1 - 2\phi(x_0)]t + C_2. \tag{34}$$

La deuxième constante est déterminée par l'équation de la ligne caractéristique en $t = 0$,

$$x(0) = x_0 = C_2. \tag{35}$$

L'équation générale pour toute condition initiale est donnée par l'expression suivante

$$x(t) = [1 - 2\phi(x_0)]t + x_0. \tag{36}$$

En remplaçant $\phi(x_0)$ par les conditions initiales données, les lignes caractéristiques sont

$$\begin{cases} x(t) = (1-2\alpha)t + x_0 & x_0 < 1, \\ x(t) = -\dfrac{1}{2}t + x_0 & x_0 \geq 1. \end{cases} \tag{37}$$

Ainsi, les solutions demeurent :

$$\begin{cases} u^-(x,t) = \alpha & x_0 < 1, \\ u^+(x,t) = \dfrac{3}{4} & x_0 \geq 1. \end{cases} \tag{38}$$

(b) La forme conservative de l'Eq.($\star$) est donnée par

$$u_t + [u - u^2]_x = 0. \tag{39}$$

Dès lors,

$$A(u) = u - u^2. \tag{40}$$

La formule de Rankine-Hugoniot nous donne la vitesse du choc

$$\begin{aligned}
s(t) &= \frac{A(u^+) - A(u^-)}{u^+ - u^-}, && (41)\\
&= \frac{\frac{3}{4} - (\frac{3}{4})^2 - \alpha + \alpha^2}{\frac{3}{4} - \alpha} && (42)\\
&= \frac{\frac{3}{4} - \alpha - (\frac{3}{4})^2 + \alpha^2}{\frac{3}{4} - \alpha} && (43)\\
&= 1 - \frac{(\frac{3}{4})^2 - \alpha^2}{\frac{3}{4} - \alpha} && (44)\\
&= 1 - \frac{(\frac{3}{4} - \alpha)^2}{\frac{3}{4} - \alpha} - 2\alpha\,\frac{(\frac{3}{4} - \alpha)}{(\frac{3}{4} - \alpha)} && (45)\\
&= \frac{1}{4} - \alpha. && (46)
\end{aligned}$$

(c) La ligne de choc est l'équation d'une droite de pente $s(t)$ et d'origine en $x(0) = 1$ (la discontinuité de la solution commence en ce point).
Ainsi,

$$x_s(t) = \left(\frac{1}{4} - \alpha\right) t + 1. \tag{47}$$

(d) — $\alpha = 1/6$: $x_s(t) = t/12 + 1$.
— $\alpha = 1/4$: $x_s(t) = 1$.
— $\alpha = 1/2$: $x_s(t) = -t/4 + 1$.
Ces lignes caractéristiques sont tracées à la Fig.(1).

(e) — $\alpha < 1/4$: vitesse de propagation du choc est positive.
— $\alpha = 1/4$: vitesse de propagation du choc est nulle.
— $\alpha > 1/4$: vitesse de propagation du choc est négative.
— $\alpha = 3/4$: aucun choc n'est présent, car la condition initiale est uniforme.
— La solution générale sera

$$\begin{cases} u_1(x,t) = \alpha & x < x_s \text{ and } t > 0,\\ u_2(x,t) = \dfrac{3}{4} & x > x_s \text{ and } t > 0. \end{cases} \tag{48}$$

Remarque : Le critère d'entropie est bien respecté pour $0 \leq \alpha \leq 3/4$.

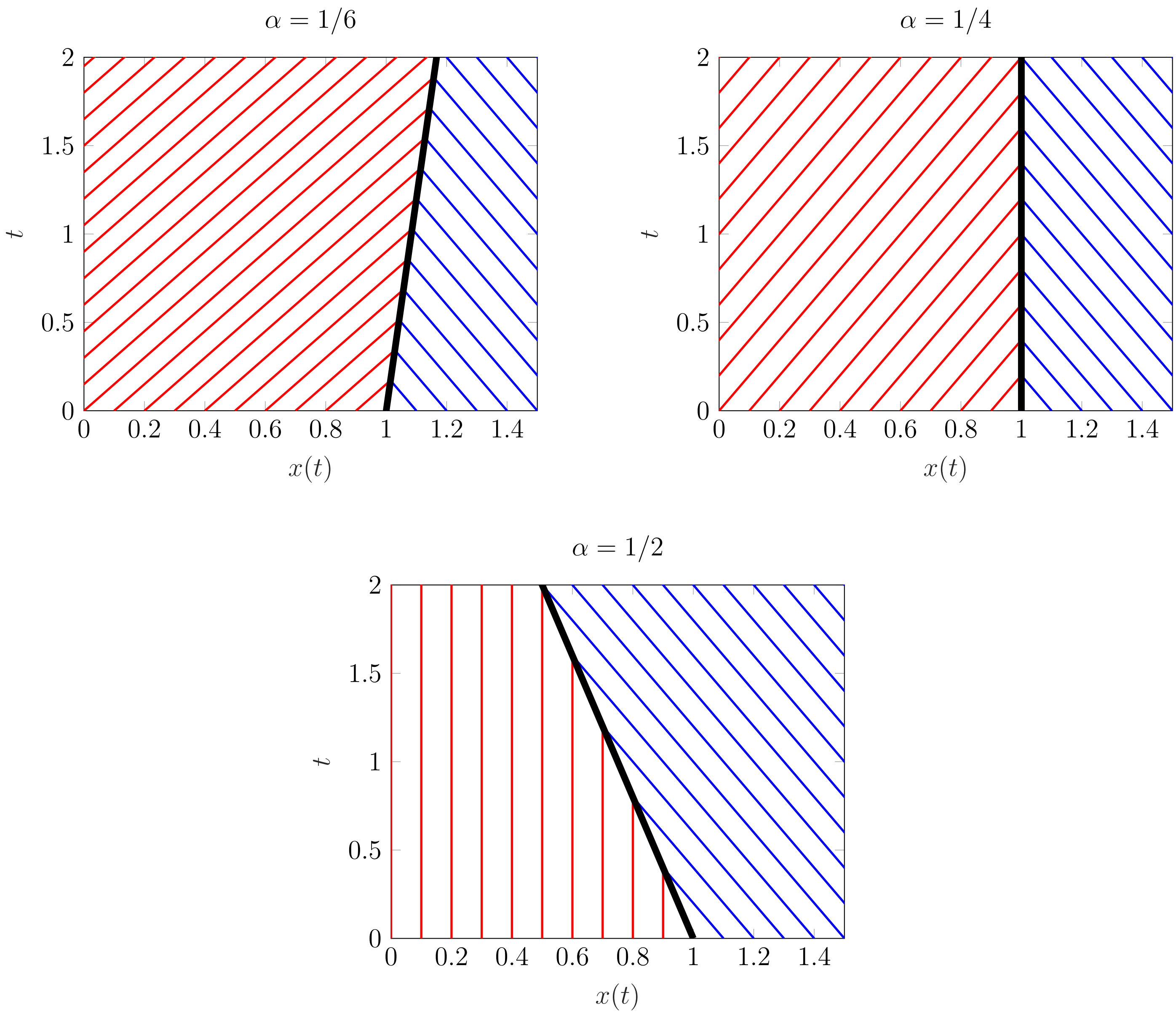

FIGURE 1 – Représentation des lignes caractéristiques pour $x(0) < 1$ en rouge et $x(0) \geq 1$ en bleu. Les lignes de choc sont dessinées en noir.