Examen de math. A

1. Définitions géométriques

➔ Page 23

a) du sinus :

Le sinus d'un réel x est l'ordonnée du point P associé à ce réel sur le cercle trigonométrique. On associe P au réel x comme suit :

- Si $x \geq 0$, P est obtenu en parcourant le cercle centré en $(0,0)$ de rayon 1 à partir du point de coordonnées $(1,0)$ dans le sens trigonométrique, jusqu'à ce que l'arc décrit soit de longueur x.
- Si $x < 0$, P est obtenu en parcourant le cercle centré en $(0,0)$ de rayon 1 à partir du point de coordonnées $(1,0)$ dans le sens trigonométrique **inverse**, jusqu'à ce que l'arc décrit soit de longueur x.

b) du cosinus :

Le cosinus d'un réel x est l'abscisse du point P associé à ce réel sur le cercle trigonométrique. On associe P au réel x comme suit :

- Si $x \geq 0$, P est obtenu en parcourant le cercle centré en $(0,0)$ de rayon 1 à partir du point de coordonnées $(1,0)$ dans le sens trigonométrique, jusqu'à ce que l'arc décrit soit de longueur x.
- Si $x < 0$, P est obtenu en parcourant le cercle centré en $(0,0)$ de rayon 1 à partir du point de coordonnées $(1,0)$ dans le sens trigonométrique **inverse**, jusqu'à ce que l'arc décrit soit de longueur x.

2. Définition et interprétation géométrique sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

a) de la notion de convexité/concavité

➔ Page 60

- La fonction f est *convexe* sur un sous-ensemble A de I lorsque
  $$x_1, x_2 \in A \text{ et } r \in [0,1] \quad \Longrightarrow \quad f\big(x_1 + r(x_2 - x_1)\big) \leq f(x_1) + r\big(f(x_2) - f(x_1)\big)$$
- La fonction f est *concave* sur un sous-ensemble A de I lorsque
  $$x_1, x_2 \in A \text{ et } r \in [0,1] \quad \Longrightarrow \quad f\big(x_1 + r(x_2 - x_1)\big) \geq f(x_1) + r\big(f(x_2) - f(x_1)\big)$$

b) de la notion de monotonie d'une fonction

➔ Page 59

On dit qu'une fonction f est monotone sur un sous-ensemble A de I lorsqu'elle y est soit croissante, soit décroissante.

- La fonction f est *croissante* sur A lorsque
  $$x, y \in A \text{ et } x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(y)$$
- La fonction f est *décroissante* sur A lorsque
  $$x, y \in A \text{ et } x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq f(y)$$

3. Propriétés fondamentales des fonctions exponentielle et logarithme

➔ Page 75, 76

	Exponentielle - e^x	Logarithme – $\ln(x)$
Domaine de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_0^+ =]0,+\infty[$
Image	$\mathbb{R}_0^+ =]0,+\infty[$	$\mathbb{R}$
Domaine de continuité	Continue sur son domaine de définition	Continue sur son domaine de définition
Dérivabilité	Dérivable sur $\mathbb{R}$	Dérivable sur $]0^+,+\infty[$
Monotonie	*Strictement croissantes* et *bijectives* sur leur domaine de définition	
Dérivées	$De^x = e^x$	$D\ln(x) = {}^1/_x$
Limites	$\lim_{x\to-\infty}(e^x) = 0$ $\lim_{x\to+\infty}(e^x) = +\infty$	$\lim_{x\to0^+}(\ln(x)) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty}(\ln(x)) = +\infty$
/! ***Propriétés spécifiques***	$\forall x, y \in \mathbb{R}$: $e^{x+y} = e^x * e^y$	$\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+$: $\ln(x * y) = \ln(x) + \ln(y)$

4. Définitions des limites

➔ Page 85

a) Limite finie

/!\\ Conditions préalables :

- Soit une fonction f définie sur A ;
- Soit x_0 un réel tel que tout intervalle ouvert qui le contient rencontre A.

Définition :

- *La limite en x_0 de f est le réel b si les images par f d'éléments x de A sont aussi proches qu'on veut de b pour autant que ces x soient assez proches de x_0.*
- *La limite en x_0 de f est infinie si les images par f d'éléments x de A sont aussi grandes qu'on veut pour autant que ces x soient assez proches de x_0.*

b) Limite infinie

/!\\ Conditions préalables :

- Soit une fonction f définie sur A et A non borné.

Définition :

- *La limite en l'infini de f est le réel b si les images par f d'éléments x de A sont aussi proches qu'on veut de b pour autant que ces x soient assez grands en valeur absolue.*
- *La limite en l'infini de f est infinie si les images par f d'éléments x de A sont aussi grandes qu'on veut pour autant que ces x soient assez grands en valeur absolue.*

5. Théorème des valeurs intermédiaires

➔ Page 95, 96

a) Énoncé

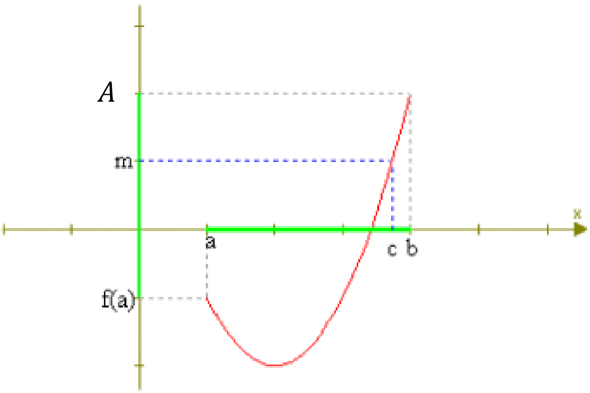
Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$.
Si les limites

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = B$$

existent (A, B pouvant être infinis) et diffèrent, alors pour tout réel R compris strictement entre A et B, il existe $r \in]a,b[$ tel que

$$f(r) = R$$

b) Interprétation graphique



c) Applications

- Pour tout polynôme $P(x)$ à coefficients réels et de degré impair, il existe au moins un réel c tel que $P(c) = 0$.

  ➔ Preuve par application du **TVI** :

  Supposons le polynôme $P(x)$ de degré N, avec N impair ; soit a_N le coefficient de x^N.

  Si $a_N > 0$:

  $$\lim_{x\to\mp\infty} P(x) = \mp\infty$$

  Si $a_N < 0$:

  $$\lim_{x\to\mp\infty} P(x) = \pm\infty$$

  Comme $R = 0 \in]-\infty, +\infty[$, le **TVI** nous affirme qu'il existe un $r \in \mathbb{R}$ tel que $P(r) = 0$.

- Si les deux limites sont de signes différents, la fonction s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]a,b[$.

  ➔ Preuve par application du **TVI** :

  Si f est continu sur un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, et que

  $$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

  Avec $f(a) \neq f(b)$, on a

  $$f(a) \leq 0 \leq f(b)$$

  Dès lors

  $$\exists x_0 \in]a,b[\text{ tel que } f(x_0) = 0$$

6. Définition de la continuité/dérivabilité d'une fonction

a) Dérivabilité d'une fonction

➔ Page 96, 97

Soit f une fonction définie sur l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et soit x_0 un point de cet intervalle. On dit que **f est dérivable en x_0** si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.
On dit aussi que **f est dérivable sur I** si f est dérivable en tout point de I.

b) Continuité d'une fonction

➔ Page 93

Soit f une fonction définie sur $A \subset \mathbb{R}$ et soit x_0 un point de A.

- On dit que **f est continu en x_0** si
$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$
existe.
- On dit que **f est continu à gauche en x_0** si
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$
existe et vaut $f(x_0)$.
- On dit que **f est continu à droite en x_0** si
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$
existe et vaut $f(x_0)$.

/!\ **Propriété importante :**

- Soit f une fonction définie sur $A \subset \mathbb{R}$ et soit x_0 un point de A.
  f est continu en x_0 si et seulement si f est continu à gauche et à droite de x_0.

c) Lien entre dérivabilité et continuité

➔ Page 98

Si la fonction f est dérivable sur $]a, b[$ alors f est continu sur $]a, b[$.
La réciproque de cette propriété est fausse.
Preuve :
Soit f dérivable sur $I =]a, b[$ et soit $x_0 \in I$.
$\forall x \in I$ et $x \neq x_0$, on a

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Comme

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = Df(x_0) \in \mathbb{R}$$

on obtient

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) * \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$= 0 * Df(x_0) = 0$$

7. Théorème des accroissements finis

➔ Page 104, 105