Matrices & Applications linéaires

TABLE DES MATIERES

UNE APPLICATION DONNÉE EST-ELLE LINÉAIRE ?

Procédure de résolution

Soit une application $f: V \longrightarrow W : x \longmapsto f(x)$. On peut prouver que f est **linéaire** en démontrant par calcul que, $\forall x, y \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, on a

$$f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y)$$

C'est pourquoi on dit que « *Une application f est linéaire si l'image par f d'une combinaison linéaire c'est la combinaison linéaire des images* ».

Exemple 1

Soit une application $f: \mathbb{C}^{\leq 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R} : a + bx + cx^2 \longmapsto \Re(a + bc)$. Cette application est-elle linéaire ?

Appliquons ce que nous venons de voir.

L'application f associe à un polynôme en x à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 2 la partie réelle d'une opération sur ses coefficients, donnée comme « $a + bc$ ». A-t-on ceci :

$$\forall P(x) = a + bx + cx^2, Q(x) = k + lx + mx^2 \in \mathbb{C}^{\leq 2}[x], \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$$
$$\Leftrightarrow f\big(\lambda_1(a + bx + cx^2) + \lambda_2(k + lx + mx^2)\big) = \lambda_1 f(a + bx + cx^2) + \lambda_2 f(k + lx + mx^2)$$

Vérifions. On a :

$$\begin{aligned}
& f\big(\lambda_1(a + bx + cx^2) + \lambda_2(k + lx + mx^2)\big) \\
&= f(\lambda_1 a + \lambda_1 bx + \lambda_1 cx^2 + \lambda_2 k + \lambda_2 lx + \lambda_2 mx^2) \\
&= f(\lambda_1 a + \lambda_2 k + (\lambda_1 b + \lambda_2 l)x + (\lambda_1 c + \lambda_2 m)x^2) \\
&= \Re\Big(\lambda_1 a + \lambda_2 k + \big((\lambda_1 b + \lambda_2 l)(\lambda_1 c + \lambda_2 m)\big)\Big) \\
&= \Re\Big(\lambda_1 a + \lambda_2 k + \big(\lambda_1{}^2 bc + \lambda_1\lambda_2 bm + \lambda_2{}^2 lm + \lambda_1\lambda_2 lc\big)\Big) \\
&= \Re(\lambda_1 a) + \Re(\lambda_2 k) + \Re(\lambda_1{}^2 bc) + \Re(\lambda_1\lambda_2 bm) + \Re(\lambda_2{}^2 lm) + \Re(\lambda_1\lambda_2 lc)
\end{aligned}$$

Or, on a aussi

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 f(a + bx + cx^2) + \lambda_2 f(k + lx + mx^2) \\
&= \lambda_1 \Re(a + bc) + \lambda_2 \Re(k + lm) \\
&= \Re(\lambda_1 a + \lambda_1 bc) + \Re(\lambda_2 k + \lambda_2 lm) \\
&= \Re(\lambda_1 a) + \Re(\lambda_1 bc) + \Re(\lambda_2 k) + \Re(\lambda_2 lm)
\end{aligned}$$

On conclut donc que f n'est pas linéaire, comme l'image d'une combinaison linéaire n'est pas égale à la combinaison linéaire des images.

Exemple 2

Soit une application $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : a + ib \longmapsto a + b$. Cette application est-elle linéaire ?

Appliquons la procédure habituelle.

L'application f associe à un complexe le réel qui est la somme de ses parties imaginaire et réelle.

A-t-on ceci :

$$\forall x = a + ib, y = c + id \in \mathbb{C}^2, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$$
$$\Leftrightarrow f\big(\lambda_1(a + ib) + \lambda_2(c + id)\big) = \lambda_1 f(a + ib) + \lambda_2 f(c + id)$$

Vérifions. On a :

$$\begin{aligned}
& f\big(\lambda_1(a + ib) + \lambda_2(c + id)\big) \\
&= f(\lambda_1 a + \lambda_1 ib + \lambda_2 c + \lambda_2 id) \\
&= f\big((\lambda_1 a + \lambda_2 c) + i(\lambda_1 b + \lambda_2 d)\big) \\
&= \lambda_1 a + \lambda_2 c + \lambda_1 b + \lambda_2 d \\
&= \lambda_1(a + b) + \lambda_2(c + d)
\end{aligned}$$

Or, on a aussi

$\lambda_1 f(a+ib) + \lambda_2 f(c+id)$ $= \lambda_1(a+b) + \lambda_2(c+d)$

On conclut donc que f est bien linéaire, comme l'image d'une combinaison linéaire est égale à la combinaison linéaire des images.

Trouver la matrice associée à une application linéaire donnée

Procédure de résolution

Soit une application $f : V \longrightarrow W : x \longmapsto f(x)$, avec $\mathcal{B}_V = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}_W = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$. Pour trouver la matrice représentant l'application f, nommée $[f]_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}$, on procède comme suit :

1) Prendre l'image des éléments de $\mathcal{B}_V$ par f.
2) On est d'accord sur le fait que
$$f(e_i) \in W, \forall i \; tq. \, 0 < i \leq n$$
On peut donc trouver les composantes de chacun des $f(e_i)$ dans W en utilisant la base $\mathcal{B}_W$, qu'on note
$$[f(e_i)]_{\mathcal{B}_W} = \begin{pmatrix} b_1^i = \text{composante de } e_i \text{ en } g_1 \\ b_2^i = \text{composante de } e_i \text{ en } g_2 \\ b_3^i = \text{composante de } e_i \text{ en } g_3 \\ \vdots \\ b_m^i = \text{composante de } e_i \text{ en } g_m \end{pmatrix}$$
3) Maintenant c'est pratiquement terminé. On place les vecteurs colonnes de composantes dans $\mathcal{B}_W$ l'un à la suite de l'autre, de sorte à trouver $\mathcal{M}$, la **matrice associée à l'application f** :
$$\mathcal{M} = \left([f(e_1)]_{\mathcal{B}_W} \quad \cdots \quad [f(e_i)]_{\mathcal{B}_W} \quad \cdots \quad [f(e_n)]_{\mathcal{B}_W}\right) = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_1^i & \cdots & b_1^n \\ b_2^1 & \cdots & b_2^i & \cdots & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_j^1 & \cdots & b_j^i & \cdots & b_j^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_m^1 & \cdots & b_m^i & \cdots & b_m^n \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit une application $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (a+ib, c+id) \longmapsto (a+b, c+d)$, où $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{R}^2$ sont des $\mathbb{R}$-vectoriels. Trouver T, la matrice représentant f.

Tout d'abord, il nous faut trouver les bases dans lesquelles nous travaillons.

a) Base de $\mathbb{C}^2$ comme $\mathbb{R}$-vectoriel (choix arbitraire) : $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^2} = \{(1,0) \, ; (0,2) \, ; (i,0); (0,-3i)\}$
b) Base de $\mathbb{R}^2$ comme $\mathbb{R}$-vectoriel (choix arbitraire) : $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(1,0) \, ; (0,1)\}$

Maintenant on peut appliquer ce que l'on a vu. Prenons les images par f des éléments de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^2}$:

a) $f(1,0) = (1+0, 0+0) = (1,0)$
b) $f(0,2) = (0+0, 2+0) = (0,2)$
c) $f(i,0) = (0+1, 0+0) = (1,0)$
d) $f(0,-3i) = (0+0, 0-3) = (0,-3)$

Ensuite prenons leurs composantes dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$:

a) $[(1,0)]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}} = \widetilde{(1 \quad 0)}$ [1]
b) $[(0,2)]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}} = \widetilde{(0 \quad 2)}$
c) $[(1,0)]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}} = \widetilde{(1 \quad 0)}$
d) $[(0,-3)]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}} = \widetilde{(0 \quad -3)}$

[1] Ces matrices sont tiltées (transposées) car un vecteur de composantes est un vecteur colonne par convention.

On a plus qu'à construire la matrice en juxtaposant les vecteurs colonnes ainsi trouvés :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Remarque

Une propriété intéressante des matrices associées à des applications linéaires est la suivante :

Soit $f: V \longrightarrow W: x \longmapsto f(x)$, avec $\mathcal{B}_V = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}_W = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$.

Si on veut connaître les composantes dans $\mathcal{B}_W$ de l'image par f d'un élément v de V, il suffit de multiplier, dans cet ordre, la matrice associée par le vecteur colonne des composantes de v dans $\mathcal{B}_V$! On a, en math :

$$[f(v)]_{\mathcal{B}_W} = [f]_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W} * [v]_{\mathcal{B}_V}$$

De plus, cette propriété est démontrable et à connaître pour l'examen, comme par hasard ☺

Trouver une matrice de changement de base

Introduction

Soient un K-vectoriels V qui admet deux bases $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

Soit v un élément de V exprimé dans la base $\mathcal{B}_1$. Comme $v \in V$, il peut se décomposer en une combinaison linéaire des éléments de sa base, et on a donc par exemple $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ avec les α_i connus. Les composantes de v dans la base $\mathcal{B}_1$ sont donc

$$[v]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Or, il doit aussi pouvoir s'exprimer dans la base $\mathcal{B}_2$: on peut dire ceci sans qu'on connaisse ses composantes. Même démarche, et on a par exemple $v = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \dots + \beta_n g_n$ avec les β_i inconnus. Les composantes de v dans la base $\mathcal{B}_2$ seraient donc

$$[v]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Si on veut connaître les composantes d'un élément exprimé en fonction de $\mathcal{B}_1$ dans la base $\mathcal{B}_2$, on utilise ce qu'on appelle une **matrice de changement de base**, notée $\mathcal{M}(\mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2)$ ou $[\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2]$.

Voici comment la trouver.

Procédure de résolution

1) Exprimer les éléments de $\mathcal{B}_1$ en fonction de la base $\mathcal{B}_2$ (on trouvera n vecteurs colonnes de composantes)
2) Juxtaposer les n vecteurs colonnes à n composantes l'un à côté de l'autre, dans l'ordre des éléments de la base $\mathcal{B}_1$.
3) Pour trouver la matrice de changement de base $\mathcal{M}(\mathcal{B}_2 \longrightarrow \mathcal{B}_1)$, il suffit d'inverser la matrice ainsi trouvée.

Exemple

Prenons $\mathbb{R}^3$ *comme un* $\mathbb{R}$*-vectoriel. Deux de ses bases sont* $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0) ; (0,1,0) ; (0,0,1)\}$ *et* $\mathcal{B}_2 = \{(0,4,0) ; (5,0,0) ; (0,0,-1)\}$. *Trouver les matrices de changement de base dans les deux sens.*

Décomposons les éléments de $\mathcal{B}_1$ dans la base $\mathcal{B}_2$. On a

$$[(1,0,0)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix}, [(0,1,0)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [(0,0,1)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Construisons la matrice de changement de base $\mathcal{M}(\mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2)$:

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Par exemple, si on a le point $(3, 2, 1)$ dans la base $\mathcal{B}_1$, ses coordonnées dans $\mathcal{B}_2$ seront

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Maintenant il suffit d'inverser $\mathcal{M}(\mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2)$ pour trouver $\mathcal{M}(\mathcal{B}_2 \longrightarrow \mathcal{B}_1)$. Je vous laisse faire ☺