Résoudre une équation différentielle

Ce document a pour but de montrer, étape par étape, la résolution générique d'une équation différentielle à coefficients constants (« **EDCC** »). Merci à J. Crasborn pour ses explications. Mise à jour : 12/12/2009.

Étape 1

Regrouper dans le premier membre tout ce qui concerne la fonction inconnue. Le reste est le second membre.

Cas EDCC 1er ordre :

$$a * Df(x) + b * f(x) = g(x) \; ; \; a, b \in \mathbb{C} \text{ et } a \neq 0$$

Cas EDCC 2ème ordre :

$$a * D^2 f(x) + b * Df(x) \; + \; c * f(x) = g(x) \, ; \; a, b, \in \mathbb{C} \text{ et } a \neq 0$$

Étape 2

Déterminer le domaine de continuité de g pour déterminer l'ensemble I sur lequel on travaille (le plus grand ensemble *ouvert* compris dans ce domaine).

Étape 3

Résoudre l'équation homogène associée.

Écrire et résoudre l'équation caractéristique

Équation caractéristique générale obtenue en remplaçant les $D^k f(x)$ par des z^k

Cas EDCC 1er ordre :

$$az + b = 0$$
$$\Leftrightarrow z = {}^{-b}/_{a}$$
$$\Longrightarrow f_H(x) = c * e^{\left(\frac{-b}{a} * x\right)} \quad ; x \in \mathbb{R} \text{ et } c \text{ constante arbitraire complexe}$$

Cas EDCC 2ème ordre :

$$az^2 + bz + c = 0$$
$$\Longrightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \Delta \neq 0 : \; z_1 \neq z_2 \; (\text{"zéro } \textbf{simple}\text{"}) \\ \Delta = 0 : \; z_1 = z_2 = z_0 \; (\text{"zéro } \textbf{double}\text{"}) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \Delta \neq 0 : \; f_H(x) = c_1 * e^{(z_1 * x)} + c_2 * e^{(z_2 * x)} & ; x \in \mathbb{R} \text{ et } c_{1,2} \text{ constantes arbitraires complexes} \\ \Delta = 0 : \; f_H(x) = (c_1 * x + c_2) * e^{(z_0 * x)} & ; x \in \mathbb{R} \text{ et } c_{1,2} \text{ constantes arbitraires complexes} \end{cases}$$

Étape 4

Rechercher $f_p(x)$ une solution particulière de l'équation donnée. Deux méthodes s'offrent à nous :

a) Variation des constantes (méthode générale, à éviter si possible car fastidieuse)
b) Exponentielle-polynôme (méthode particulière, à préférer car plus « *rapide* »)

Étape 5

Donner l'ensemble des solutions de l'équation

$$f(x) = f_H + f_p(x) \quad ; x \in I$$

Étape 6

Chercher LA solution qui vérifie une[1] ou deux[2] conditions initiales.

[1] Dans le cas d'une équation différentielle d'ordre 1

[2] Dans le cas d'une équation différentielle d'ordre 2

Annexe 1 : La méthode « Exponentielle-polynôme »

On a

$g(x) = P(x) * e^{\alpha x}$; avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $P(x)$ un polynôme

$f_p(x) = Q(x) * e^{\alpha x} * x^m$; avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $Q(x)$ un polynôme de même degré que $P(x)$

- Où $Q(x)$ est un polynôme de même degré que $P(x)$
- Où m correspond à la multiplicité de α comme zéro de l'équation caractéristique :

Cas EDCC 1er ordre :

- $m = 0$ si $\alpha \neq {}^{-b}/_{a}$
- $m = 1$ si $\alpha = {}^{-b}/_{a}$

Cas EDCC 2ème ordre :

- $m = 0$ si $\alpha \neq z_0$ ou $\alpha \neq z_{1,2}$
- $m = 1$ si $\alpha = z_1$ ou $\alpha = z_2$
- $m = 2$ si $\alpha = z_0$ (truc : z_0 = zéro **double**, et dans **double** il y a **2**, donc $\boldsymbol{m = 2}$)

Annexe 2 : Ruses

1) $g(x) = P(x)$
   - On trouve le $g(x)$ qui nous arrange en multipliant le polynôme $P(x)$ par une exponentielle « qui ne sert à rien » :
     $\Rightarrow g(x) = P(x) * e^{0*x}$

2) $g(x) = e^{\alpha x}$
   - On trouve le $g(x)$ qui nous arrange en multipliant l'exponentielle par un polynôme 1^0 « qui ne sert à rien » :
     $\Rightarrow g(x) = 1^0 * e^{\alpha x}$

3) $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$
   - On trouve les solutions particulières $f_1(x)$ et $f_2(x)$ de $g_1(x)$ et $g_2(x)$, et leur somme nous donne la solution particulière $f_p(x)$:
     $\Rightarrow f_p(x) = f_1(x) + f_2(x)$

4) $g(x) = P(x) * e^{\alpha x} * \sin(\beta x)$ ou $g(x) = P(x) * e^{\alpha x} * \cos(\beta x)$; avec $\beta \in \mathbb{R}$
   - On va utiliser la formule très utile

     $$\boldsymbol{e^{ix} = \cos(x) + i * \sin(x)} \text{ ; avec } x \in \mathbb{R}$$

   - Définissons
     $G(x) = P(x) * e^{\alpha x} * e^{i\beta x}$
     $= P(x) * e^{(\alpha + i\beta)x}$
   - Définissons
     $F_p(x) = Q(x) * e^{(\alpha + i\beta)x} * x^m$
     Où $Q(x)$ est un polynôme de même degré que $P(x)$
   - $f_p(x) = \begin{cases} \text{si sinus : } \Im F_p(x) \\ \text{si cosinus : } \Re F_p(x) \end{cases}$

Annexe 3 : La méthode par « variation de constante »

À utiliser lorsqu'aucune ruse ne permet de transformer le deuxième membre pour qu'on puisse appliquer la méthode exponentielle-polynôme. Par exemple,

- $Df(x) + 2f(x) = \underbrace{\frac{1}{1+e^x}}_{g(x)}$

$g(x)$ ne pourra jamais être réécrit sous la forme d'un produit d'un polynôme par une exponentielle.

Pour résoudre un tel type d'équation, on procède comme précédemment jusqu'à la détermination de l'ensemble des solutions de l'équation homogène, à partir d'où on procède différemment.

Cas EDCC 1er ordre :

1) On a donc comme ensemble des solutions de l'équation homogène :
$$f_H(x) = c * e^{\left(\frac{-b}{a} * x\right)} \quad ; x \in \mathbb{R} \text{ et } c \text{ constante arbitraire complexe}$$

2) Remplaçons la constante c par une fonction $c(x)$, posée comme ceci :
$$c(x) * e^{\left(\frac{-b}{a} * x\right)} = \frac{g(x)}{a}$$
$$\Leftrightarrow c(x) = \frac{g(x)}{a} * e^{\left(\frac{b}{a} * x\right)}$$

3) Dom. de continuité de $c(x) = I = dom_c\, g(x)$ car l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
4) Poser
$$P(x) \cong \int c(x)\, dx \cong \int \frac{g(x)}{a} * e^{\left(\frac{b}{a} * x\right)}\, dx$$

   et primitiver $c(x)$ pour trouver un polynôme $P(x)$ partie de la fonction particulière
$$f_p(x) = P(x) * e^{\left(\frac{-b}{a} * x\right)}$$

5) Enfin, appliquer la formule générale pour trouver l'ensemble des solutions de l'équation de base :
$$f(x) = f_H + f_p(x) \quad ; x \in I$$
$$\Leftrightarrow f(x) = \big(c + P(x)\big) * e^{\left(\frac{-b}{a} * x\right)} \quad ; x \in I$$

Cas EDCC 2ème ordre :

1) On a donc comme ensemble des solutions de l'équation homogène (en toute généralité, sachant que le cas $\Delta \neq 0$ est une généralisation du cas $\Delta = 0$):
$$f_H(x) = c_1 * e^{(z_1 * x)} + c_2 * e^{(z_2 * x)} \quad ; x \in \mathbb{R} \text{ et } c_{1,2} \text{ constantes arbitraires complexes}$$

   Pour simplifier, posons que
$$u_1(x) = e^{(z_1 * x)} \quad et \quad u_2(x) = e^{(z_2 * x)}$$
$$\Leftrightarrow f_H(x) = c_1 * u_1(x) + c_2 * u_2(x)$$

2) Remplaçons les constantes c_1, c_2 par les fonctions $c_1(x), c_2(x)$, posées comme ceci :
$$\begin{cases} c_1(x) * u_1(x) + c_2(x) * u_2(x) = 0 \\ c_1(x) * Du_1(x) + c_2(x) * Du_2(x) = \dfrac{g(x)}{a} \end{cases}$$
3) Résoudre le système afin de trouver $c_1(x)$ et $c_2(x)$.
4) Poser
$$P_1(x) \cong \int c_1(x)\, dx$$
$$P_2(x) \cong \int c_2(x)\, dx$$

   et résoudre les primitives pour trouver deux polynômes $P_1(x), P_2(x)$ parties de la fonction particulière
$$f_p(x) = P_1(x) * u_1(x) + P_2(x) * u_2(x)$$

5) Enfin, appliquer la formule générale pour trouver l'ensemble des solutions de l'équation de base :
$$f(x) = f_H + f_p(x) \quad ; x \in I$$