Théorie de l'information et du codage - Interrogation
Partie Théorie - 23 novembre 2007

Durée : 1h.
Téléphones et calculatrices doivent être éteints!

Pour les questions 1 à 3, répondre *vrai* ou *faux*. Pour les sous-questions étoilées ($\star$), justifier la réponse par une propriété, un développement, ou un contre-exemple (dans le cas "faux").

Les questions 4 à 6 sont plus ouvertes et peuvent nécessiter quelques développements élémentaires.

1. **Entropies**

   $\star$ (a) $H(\mathcal{X}) + H(\mathcal{Y}) = 2H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \Rightarrow \mathcal{X} = \mathcal{Y}$

   (b) $H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}|\mathcal{Z}) = H(\mathcal{X}|\mathcal{Z}) + H(\mathcal{Y}|\mathcal{Z}) \Leftrightarrow \mathcal{X} \perp \mathcal{Y}|\mathcal{Z}$

   $\star$ (c) $H(\mathcal{Z}|\mathcal{Y}) \leq H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) - H(\mathcal{Y})$

   (d) $H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \Leftrightarrow \mathcal{Z} = f(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

2. **Informations mutuelles**

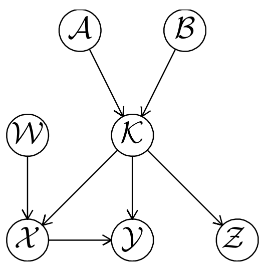
   (a) $I(\mathcal{X}; \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = 0 \Rightarrow I(\mathcal{X}; \mathcal{Z}|\mathcal{Y}) = 0$

   $\star$ (b) $I(\mathcal{X}, \mathcal{Y}; \mathcal{W}, \mathcal{Z}|\mathcal{A}) \leq I(\mathcal{X}; \mathcal{W}|\mathcal{A}) + I(\mathcal{X}; \mathcal{Z}|\mathcal{A}) + I(\mathcal{Y}; \mathcal{W}|\mathcal{A}) + I(\mathcal{Y}; \mathcal{Z}|\mathcal{A})$

   (c) $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y} \Rightarrow I(\mathcal{X}; \mathcal{Y}|\mathcal{Z}) > 0$

   (d) $\mathcal{Z} = \mathcal{X}^2 \Rightarrow I(\mathcal{X}; \mathcal{Y}) \leq I(\mathcal{Y}; \mathcal{Z})$

3. **Réseaux bayésiens et indépendances conditionnelles**
   Dans le réseau bayésien ci-dessous, on a *nécessairement*



(a) $\mathcal{A} \perp \mathcal{Y}|\mathcal{K}$

(b) $\mathcal{A} \not\perp \mathcal{B}|\mathcal{K}$

(c) $\mathcal{K} \perp \mathcal{W}$

(d) $\mathcal{K} \perp \mathcal{W}|\mathcal{Y}$

(e) $\mathcal{Z} \perp \mathcal{W}|\mathcal{K}$

4. **Chaînes de Markov**
Soit une chaîne de Markov $\mathcal{X}$ à 2 états $\{1,2\}$ invariante dans le temps, de distribution initiale $\boldsymbol{\pi} = [0.5 \;\; 0.5]$ et matrice de transition $\mathbf{\Pi}$. Pour rappel, $\boldsymbol{\pi}_i = P(\mathcal{X}_1 = i)$ et $\mathbf{\Pi}_{ij} = P(\mathcal{X}_{t+1} = j | \mathcal{X}_t = i)$.
Donner, par la spécification de $\mathbf{\Pi}$, un exemple de chaîne

   (a) périodique
   (b) non ergodique
   (c) de distribution stationnaire unique $\boldsymbol{\pi}_\infty = [0.2 \;\; 0.8]$.

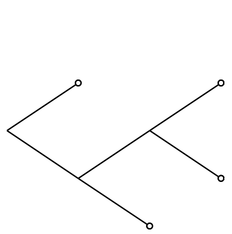
5. **Messages typiques**
Soit une source stationnaire sans mémoire $\mathcal{X} = \{a, b, c, d\}$ émettant $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots$
On note les probabilités d'émission des symboles

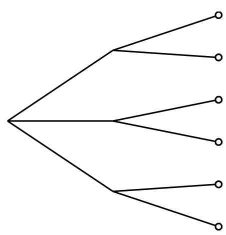
$$P(\mathcal{X}_i = a) = p_a \qquad P(\mathcal{X}_i = b) = p_b \qquad P(\mathcal{X}_i = c) = p_c \qquad P(\mathcal{X}_i = d) = p_d.$$

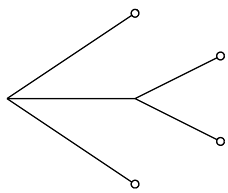
Donner les conditions minimales sur p_a, p_b, p_c, p_d qui rendent les assertions suivantes vraies. Répondre *toujours vrai* ou *toujours faux* si c'est le cas quelle que soit la distribution de probabilité (p_a, p_b, p_c, p_d) de $\mathcal{X}_i$.

   (a) Si le message `cdabcdabcd` est ϵ-typique, alors `dbdbddbdbd` est ϵ-typique.
   (b) Le nombre de messages ϵ-typiques de longueur n est 3^n pour tout ϵ.
   (c) Le nombre de messages ϵ-typiques de longueur n est strictement supérieur à $2^{n(H(\mathcal{X})+\epsilon)}$.
   (d) La probabilité d'émission d'un message ϵ-typique m de longueur n est toujours inférieure ou égale à $2^{-n(1-\epsilon)}$.

6. **Code optimaux**
Donner pour chaque arbre de code ci-dessous un exemple de source sans mémoire stationnaire pour laquelle l'arbre correspond à un arbre de code instantané optimal. Quand c'est possible, prendre un code complet et le signaler. La source est spécifiée par les probabilités de ses Q symboles. Placer les symboles sur l'arbre, et indiquer les mots de code correspondant dans l'alphabet q-aire choisi. Si l'arbre ne peut représenter de code instantané optimal, expliquer (et aucun exemple de source n'est alors nécessaire).


(a)


(b)


(c)

Bon travail.