Théorie de l'information et du codage - Interrogation
Partie Exercices - 23 novembre 2007

Durée : 3h.

Résoudre les 3 questions suivantes (sur feuilles séparées).

1. **Entropie et information mutuelle.**
Soient les variables aléatoires discrètes $\mathcal{X} = \{-1, +1\}$ et $\mathcal{Y} = \{-1, +1\}$.
Soit une variable aléatoire produit des deux premières $\mathcal{W} = \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}$, donc également à valeur dans $\{-1, +1\}$.
Les distributions de probabilité marginales de ces trois variables sont données:

$$P(\mathcal{X} = 1) = p_1, \qquad P(\mathcal{Y} = 1) = q_1, \qquad P(\mathcal{W} = 1) = r_1,$$

avec $p_1 = 0.25$, $q_1 = 0.3$, $r_1 = 0.9$.
On demande de calculer

   (a) $H(\mathcal{X})$, $H(\mathcal{Y})$, $H(\mathcal{W})$

   (b) $I(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$

   (c) $I(\mathcal{X}; \mathcal{W})$, $I(\mathcal{Y}; \mathcal{W})$

   (d) $I(\mathcal{X}; \mathcal{Y}|\mathcal{W})$, $I(\mathcal{Y}; \mathcal{W}|\mathcal{X})$

   (e) $I(\mathcal{X}; \mathcal{Y}; \mathcal{W})$.

Indication: p_1, q_1 et r_1 spécifient univoquement la distribution conjointe de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$.

A présent, r_1 devient un paramètre libre.
On suppose que $0 \leq p_1 \leq 1$ et $0 \leq q_1 \leq 1$ sont fixés.

   (f) En se servant de propriétés de la convexité, expliquer pourquoi à p_1, q_1 fixés, l'information mutuelle moyenne $I(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ est une fonction convexe de r_1.

   (g) Pour quelle valeur de r_1 l'information mutuelle moyenne $I(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ est-elle minimale?
   (Exprimer r_1 en fonction de p_1 et q_1.)

   (h) Le domaine de définition de $I(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ vue comme une fonction de r_1 est $L \leq r_1 \leq U$.
   Expliquer pourquoi la ou les valeurs de r_1 qui maximisent $I(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ sont à rechercher dans $\{L, U\}$.
   Etablir l'expression de $L \geq 0$ et $U \leq 1$ en fonction de p_1 et q_1.

2. **Entropie de source.**
Soient deux sources indépendantes $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ d'alphabet $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ et $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$.
Ces sources émettent des symboles successifs $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots$ et $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \ldots$
Chacune de ces séquences forme un processus sans mémoire.
On donne $P(\mathcal{X}_i = 1) = p_1$ et $P(\mathcal{Y}_i = 1) = q_1$ avec $p_1 \neq q_1$, et $p_1, q_1 \notin \{0, 1\}$.
On dérive 4 sources $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}'$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ des processus $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$:

$$\mathcal{Z}_i = \begin{cases} \mathcal{X}_i & \text{si } i \text{ est impair} \\ \mathcal{Y}_i & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases} \qquad \mathcal{Z}'_i = 2\mathcal{X}_{2i-1} + \mathcal{Y}_{2i}$$

$$\mathcal{V}_i = \max\{\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i\} \qquad \mathcal{W}_i = \begin{cases} \mathcal{X}_i & \text{si } i \text{ est impair} \\ \max\{\mathcal{X}_i, \mathcal{W}_{i-1}\} & \text{si } i \text{ est pair.} \end{cases}$$

(a) Pour chacun des processus $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}'$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, préciser s'il est sans mémoire, stationnaire, ergodique.

(b) Donner le débit d'entropie $H(\cdot)$ de chaque source en fonction de p_1 et q_1, si ces débits existent. Préciser dans chaque cas laquelle des deux définitions du débit d'entropie a été utilisée, et si les deux définitions coïncident.
S'ils sont définis, comparer les débits d'entropie de $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}'$.

(c) Supposer à présent que $q_1 = 0.3$. Déterminer pour chacun des débits d'entropie calculés au point précédent la valeur de p_1 qui le maximise.

3. **Codage de source.**
Soit une source ternaire sans mémoire $S = \{a, b, c\}$ émettant $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots$ avec

$$P(\mathcal{X}_i = a) = 0.1, \qquad P(\mathcal{X}_i = b) = 0.2, \qquad P(\mathcal{X}_i = c) = 0.7.$$

On considère l'alphabet de code {0,1,2,3}.
On demande

(a) D'établir un code optimal dans l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ pour l'extension d'ordre 2 de la source S.
Lister les symboles de l'extension d'ordre 2 et les mots de code correpondants.
Préciser le nombre de code optimaux différents possibles pour le problème.

(b) De calculer la longueur moyenne des mots de code, par symbole de la source S.

(c) De calculer la borne inférieure de la longueur moyenne des mots de code.

(d) De calculer la longueur moyenne des mots de code du code de Shannon appliqué à l'extension d'ordre 2 de la source S.
Exprimer tout comme au point (b) la réponse par symbole de la source S.

(e) De commenter brièvement les résultats obtenus (faire le lien avec la théorie).

Bon travail.