Théorie de l'information et du codage - Interrogation
Partie Théorie - 31 octobre 2006

Durée : 1h30.
Téléphones et calculatrices doivent être éteints!

Les questions ci-dessous sont du type "vrai/faux" : il s'agit d'indiquer si les affirmations énoncées sont vraies ou fausses. Pour les questions marquées d'une étoile ($\star$) on demande de justifier la réponse : si la réponse est "vrai", justifier par une propriété ou un développement; si la réponse est "faux", le plus simple est généralement de donner un contre-exemple.

1. Entropies

   (a) $H(\mathcal{X},\mathcal{Y}|\mathcal{Z}) = H(\mathcal{X}|\mathcal{Z}) + H(\mathcal{Y}|\mathcal{Z}) \Rightarrow \mathcal{X} \perp \mathcal{Y}|\mathcal{Z}$

   (b) ($\star$) $H(\mathcal{X}) = \log_2|\mathcal{X}|$, $H(\mathcal{Y}) = \log_2|\mathcal{Y}| \Rightarrow \mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$

   (c) $H(\mathcal{X}|\mathcal{Y}) = H(\mathcal{Z}|\mathcal{Y}) = 0 \Rightarrow \mathcal{X} \perp \mathcal{Z}|\mathcal{Y}$

   (d) $H(\mathcal{X}|\mathcal{Y}) = H(\mathcal{Y}|\mathcal{X}) \Leftrightarrow H(\mathcal{X}) = H(\mathcal{Y})$

   (e) ($\star$) $H(\mathcal{X},\mathcal{Y}) < H(\mathcal{X}) + H(\mathcal{Y}) \Rightarrow \mathcal{X} \not\perp \mathcal{Y}$

   (f) ($\star$) $H(\mathcal{Y}) > \log_2|\mathcal{X}| \Rightarrow H(\mathcal{X},\mathcal{Y}) > \frac{1}{2}(H(\mathcal{X}) + H(\mathcal{Y}))$

   (g) ($\star$) $H(\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}) = H(\mathcal{X}) \Rightarrow \mathcal{Z} = f(\mathcal{Y})$

2. Informations mutuelles

   (a) $I(\mathcal{X};\mathcal{Z}) \geq I(\mathcal{X};\mathcal{Z}|\mathcal{Y})$

   (b) $I(\mathcal{Y};\mathcal{X},\mathcal{Z}) = I(\mathcal{X};\mathcal{Y}) + I(\mathcal{Y};\mathcal{Z}) - I(\mathcal{X};\mathcal{Z}) + I(\mathcal{X};\mathcal{Y}|\mathcal{Z})$

   (c) ($\star$) $I(\mathcal{X},\mathcal{Y};\mathcal{W},\mathcal{Z}) \geq \max\{I(\mathcal{X};\mathcal{W}), I(\mathcal{Y};\mathcal{W}), I(\mathcal{X};\mathcal{Z}), I(\mathcal{Y};\mathcal{Z})\}$

   (d) ($\star$) $I(\mathcal{W},\mathcal{X};\mathcal{Y},\mathcal{Z}) = I(\mathcal{W},\mathcal{X};\mathcal{Y}) + I(\mathcal{W};\mathcal{Z}|\mathcal{Y}) \Rightarrow \mathcal{X} \perp \mathcal{Z}|\mathcal{W},\mathcal{Y}$

   (e) ($\star$) $I(\mathcal{X};\mathcal{Y}) < I(\mathcal{X};\mathcal{Y},\mathcal{Z}) \Rightarrow \mathcal{X} \not\perp \mathcal{Z}|\mathcal{Y}$

   (f) ($\star$) $\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{Z} \Leftrightarrow I(\mathcal{X};\mathcal{Z}|\mathcal{Y}) = 0$

   (g) $\mathcal{Z} = \mathcal{X}^2 \Rightarrow I(\mathcal{Y};\mathcal{Z}) \leq H(\mathcal{Y}) - H(\mathcal{Y}|\mathcal{X})$

3. Factorisation de distributions conjointes
   Soit $P(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = P(\mathcal{A})P(\mathcal{B})P(\mathcal{X}|\mathcal{A})P(\mathcal{Y}|\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{X})P(\mathcal{Z}|\mathcal{B}, \mathcal{Y})$.
   On a nécessairement

   (a) $\mathcal{A} \not\perp \mathcal{B}|\mathcal{Z}$

   (b) $(\star)$ $I(\mathcal{X}, \mathcal{Z}|\mathcal{Y}) = 0$

   (c) $I(\mathcal{X}; \mathcal{Z}|\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq I(\mathcal{Y}; \mathcal{Z}|\mathcal{A}, \mathcal{B})$

   (d) $(\star)$ $H(\mathcal{B}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}) = H(\mathcal{Z}) + H(\mathcal{B}|\mathcal{Z}) + H(\mathcal{X}|\mathcal{B})$

4. Réseaux bayésiens et indépendances conditionnelles
   Dans le réseau bayésien ci-dessous, on a nécessairement

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \\
\mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Z} \arrow[d] \\
\mathcal{U} & \mathcal{T} & \mathcal{V}
\end{tikzcd}$$

   (a) $(\star)$ $\mathcal{U} \perp \mathcal{C}|\mathcal{B}$

   (b) $I(\mathcal{U}; \mathcal{V}) \leq I(\mathcal{T}; \mathcal{V})$

   (c) $(\star)$ $I(\mathcal{A}; \mathcal{C}) = 0$

   (d) $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{V}$

   (e) $H(\mathcal{U}|\mathcal{Y}) = H(\mathcal{U}|\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$

Bon travail!