Théorie de l'information et du codage - Interrogation
Partie Exercices - 31 octobre 2006

Durée : 2h30.

1. **Lancer de dé borné**
   Trois boules noires numérotées 1,2,3 sont placées dans un sac. On tire une boule du sac, puis on lance 2 dés, un rouge et un vert, jusqu'à ce que le score de chacun des dés soit inférieur ou égal au numéro inscrit sur la boule noire tirée. On note alors le score de chacun des dés. Soient les variables aléatoires

   - $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$: le numéro de la boule noire tirée,
   - $\mathcal{X}_1 = \{1, 2, 3\}$: le score du dé rouge noté,
   - $\mathcal{X}_2 = \{1, 2, 3\}$: le score du dé vert noté.

   (a) Dessiner un réseau bayésien représentant les relations entre ces 3 variables. En déduire les éventuelles relations d'indépendance et d'indépendance conditionnelle.

   (b) Calculer $H(\mathcal{A})$, $H(\mathcal{X}_1)$, $I(\mathcal{X}_1; \mathcal{X}_2)$.

   (c) Calculer $H(\mathcal{A}|\mathcal{X}_1)$, $I(\mathcal{X}_1; \mathcal{A})$, $I(\mathcal{X}_1; \mathcal{A}|\mathcal{X}_2)$ et $I(\mathcal{A}; \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$.

   (d) Soit $\mathcal{Z} = \frac{1}{2}(\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2)$. Calculer $I(\mathcal{A}; \mathcal{Z})$.
   Comparer les valeurs de $I(\mathcal{A}; \mathcal{Z})$, $I(\mathcal{A}; \mathcal{X}_1)$, $I(\mathcal{A}; \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ et interpréter.

   (e) Supposer à présent qu'au lieu de 2 dés, on en lance n. On considère donc n variables aléatoires $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$.
   Calculez $\lim_{n\to\infty} I(\mathcal{A}; \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n)$.
   Suggestion : raisonner sur les entropies qui définissent l'information mutuelle moyenne.
   Déduire de la limite une borne sur $I(\mathcal{A}; \mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n)$ indépendante de n.

Bon travail!