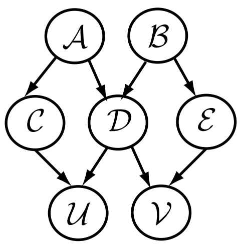
Théorie de l'information et du codage - Examen écrit
Partie Théorie - 24 janvier 2006

La majorité des questions ci-dessous sont du type "vrai/faux" : il s'agit d'indiquer si les affirmations énoncées sont vraies ou fausses. Pour les questions marquées d'un astérisque (*), on demande de justifier la réponse : si la réponse est "vrai", justifier par une propriété ou un développement; si la réponse est "faux", donner un contre-exemple.
D'autres questions demandent une réponse ouverte et peuvent nécessiter quelques développements élémentaires.

1. Indépendances d'événements
   Soient A, B et C trois éléments, sous-ensembles d'un univers Ω.
   (a) $P(A) = 0 \Rightarrow B \perp A$
   (b) $P(A) = 2/3, P(B) = 1/2, P(C) = 1/2$
   $P(A \cap B \cap C) = 1/6$
   $\Rightarrow A, B, C$ indépendants
   (c) (*) $P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$
   (d) $A \perp B \Rightarrow P(A|B \cap C) = P(A|C)$
2. Entropies
   (a) $H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \geq (H(\mathcal{X}) + H(\mathcal{Y}))/2$
   (b) $\mathcal{T} \perp \mathcal{Z} \Rightarrow H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) + H(\mathcal{Z}, \mathcal{T}|\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = H(\mathcal{X}) + H(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}|\mathcal{X}) + H(\mathcal{T}|\mathcal{X}, \mathcal{Y})$
   (c) $H(\mathcal{X}) = H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \Rightarrow \mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$
   (d) $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y} \Rightarrow H(\mathcal{Z}|\mathcal{X}) = H(\mathcal{Z}|\mathcal{Y})$
3. Informations mutuelles
   (a) $I(\mathcal{X}; \mathcal{Z}|\mathcal{Y}) = I(\mathcal{Z}; \mathcal{Y}|\mathcal{X}) - I(\mathcal{Z}; \mathcal{Y}) + I(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$
   (b) $\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{Z} \leftrightarrow \mathcal{T} \Rightarrow I(\mathcal{X}; \mathcal{Y}) \geq I(\mathcal{X}; \mathcal{Y}|\mathcal{T})$
   (c) $I(\mathcal{X}; \mathcal{Z}|\mathcal{Y}) = 0 \Rightarrow I(\mathcal{X}; \mathcal{Y}; \mathcal{Z}) \geq 0$
   (d) $I(\mathcal{X}; \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = 0 \Rightarrow \mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$
4. Fonctions de variables aléatoires
   Soient f et g deux fonctions de variables aléatoires. La fonction f est bijective.
   (a) $\mathcal{Z} = g(\mathcal{X}) \Leftrightarrow H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$
   (b) $f(\mathcal{X}) \perp f(\mathcal{Y}) \Rightarrow \mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$
   (c) $H(\mathcal{X}|g(\mathcal{Y})) = H(\mathcal{X}|\mathcal{Y}) \Rightarrow I(\mathcal{X}; \mathcal{Y}|g(\mathcal{Y})) \leq I(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$
   (d) $I(f(\mathcal{X}); \mathcal{Y}) \geq I(\mathcal{X}; g(\mathcal{Y}))$

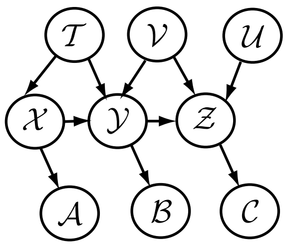
5. Factorisation de distributions conjointes
   Soit $P(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E}) = P(\mathcal{A})P(\mathcal{B}|\mathcal{A})P(\mathcal{C}|\mathcal{A})P(\mathcal{D}|\mathcal{A})P(\mathcal{E}|\mathcal{B},\mathcal{C})$.
   On a nécessairement
   (a) $P(\mathcal{A},\mathcal{C},\mathcal{E}) = P(\mathcal{E})P(\mathcal{C}|\mathcal{E})P(\mathcal{A})$
   (b) $P(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}) = P(\mathcal{A})P(\mathcal{B}|\mathcal{A})P(\mathcal{C}|\mathcal{A})$
   (c) $P(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E}) = P(\mathcal{D})P(\mathcal{E})P(\mathcal{B}|\mathcal{E})P(\mathcal{C}|\mathcal{E})P(\mathcal{A})$
   (d) $P(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}) = P(\mathcal{D})P(\mathcal{A}|\mathcal{D})P(\mathcal{B},\mathcal{C}|\mathcal{A})$

6. Réseaux bayésiens et indépendances conditionnelles
   Dans le réseau bayésien ci-dessous, on a nécessairement



   (a) $\mathcal{A},\mathcal{B} \perp \mathcal{U}|\mathcal{C},\mathcal{D}$
   (b) $\mathcal{V} \not\perp \mathcal{B}|\mathcal{D}$
   (c) $\mathcal{U} \perp \mathcal{V}|\mathcal{D}$
   (d) $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}|\mathcal{D}$

7. Réseaux bayésiens et mesure d'information
   Dans le réseau bayésien ci-dessous, on a nécessairement



   (a) $I(\mathcal{Y};\mathcal{C}|\mathcal{X},\mathcal{T},\mathcal{V}) \geq I(\mathcal{Y};\mathcal{A}|\mathcal{X},\mathcal{T},\mathcal{V})$
   (b) $H(\mathcal{T},\mathcal{V},\mathcal{X},\mathcal{Y}) = H(\mathcal{V}) + H(\mathcal{X},\mathcal{Y}|\mathcal{V}) + H(\mathcal{T}|\mathcal{X},\mathcal{Y})$
   (c) $I(\mathcal{A};\mathcal{B}) \geq I(\mathcal{A};\mathcal{C})$
   (d) $I(\mathcal{X};\mathcal{Y}|\mathcal{Z}) \leq I(\mathcal{X};\mathcal{Y})$

8. Messages typiques
   Soient une source binaire stationnaire sans mémoire, dont la probabilité d'émission du symbole 0 vaut 0.6, et le message M = "1 1 1 0 0 0 0 1 1 1" émis par cette source.
   Ci-dessous, les ensembles ϵ-typiques sont notés $A_\epsilon^{(n)}$.
   Indication : $\log_2 0.6^4\ 0.4^6 = -10.88$ et $0.6\ \log_2 0.6 + 0.4\ \log_2 0.4 = -0.97$.
   (a) Le message M est représentatif
   (b) (*) Le message M appartient à l'ensemble typique $A_{0.1}^{(10)}$
   (c) $A_{0.1}^{(10)} \subset A_{0.2}^{(10)}$
   (d) Le rapport du nombre de messages ϵ-typiques sur le nombre total de messages possibles croît avec la longueur des messages

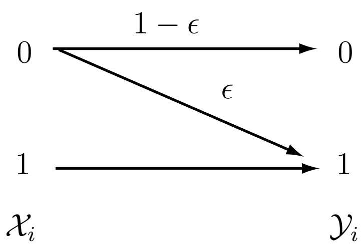
9. Sources de Markov
Soit $\mathbf{\Pi}_A$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov d'ordre 1, à 2 états. Les valeurs propres de $\mathbf{\Pi}_A$ sont 1 et 0.8.
Soit $\mathbf{\Pi}_B = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ la matrice de transition d'une autre chaîne de Markov.

   (a) (*) Toute chaîne de Markov ergodique est irréductible
   (b) Une chaîne caractérisée par $\mathbf{\Pi}_A$ possède nécessairement une distribution stationnaire
   (c) Une chaîne caractérisée par $\mathbf{\Pi}_B$ est récurrente
   (d) Une chaîne caractérisée par $\mathbf{\Pi}_B$ est irréductible

10. Codage de source

   (a) Le code binaire $\{0, 10, 110\}$ est déchiffrable
   (b) Le code binaire $\{0, 10, 110\}$ est instantané
   (c) (*) Les codes produits par l'algorithme de Huffman sur un alphabet de taille q=2 sont complets pour toute taille d'alphabet de source ≥ 2
   (d) Le code de Shannon recourt à l'extension de source pour garantir que la longueur moyenne des mots de code par symbole source est strictement inférieure à $\frac{H(S)}{\log_2 q} + 1$

11. Canal discret
Soit un canal binaire sans mémoire.



Soient :

- $\mathcal{X}_i$ le processus aléatoire d'entrée
- $\mathcal{Y}_i$ le processus aléatoire de sortie
- $0 < \epsilon < 1$ une probabilité d'erreur

   (a) Que vaut l'information mutuelle entre $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$?

On pose ensuite $\epsilon = 1/2$.

   (b) Que vaut la capacité du canal ?

12. Canal en temps continu
Soit un canal à bruit additif blanc gaussien. Son mode d'utilisation permet d'évaluer sa capacité par

$$C = \frac{1}{2}\log(1 + \alpha P) \quad \text{bits/utilisation du canal,}$$

où α est un paramètre qui dépend de la densité spectrale du bruit et de la bande passante du canal, et P est la puissance (limitée) du signal.

(a) L'expression de C est compatible avec une utilisation en full-analogique

(b) (*) L'expression de C est compatible avec une utilisation en semi-analogique et rapport signal/bruit élevé

(c) L'expression de C est compatible avec une utilisation en full-numérique et rapport signal/bruit élevé

On précise que $\alpha = 1/(N_0\ f_0)$, avec f_0 la bande passante (en Hz) du canal.

(d) N_0 vaut la densité spectrale du bruit