

## Introduction aux Processus Stochastiques Répétition: Rappels de Probabilités (2008)

### Distributions conjointes et indépendance entre variables aléatoires.

Soient les variables aléatoires discrètes  $\mathcal{X} = \{-1, +1\}$  et  $\mathcal{Y} = \{-1, +1\}$ .

Soit une variable aléatoire produit des deux premières  $\mathcal{W} = \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}$ ,

donc également à valeur dans  $\{-1, +1\}$ .

Les distributions de probabilité *marginales* de ces trois variables sont données:

$$P(\mathcal{X} = 1) = p_1, \quad P(\mathcal{Y} = 1) = q_1, \quad P(\mathcal{W} = 1) = r_1,$$

avec  $p_1 = 0.25$ ,  $q_1 = 0.3$ ,  $r_1 = 0.9$ .

Indication:  $p_1$ ,  $q_1$  et  $r_1$  spécifient univoquement la distribution *conjointe* de  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ .

On demande:

- (a) D'écrire explicitement les distributions marginales de  $\mathcal{X}$ , de  $\mathcal{Y}$ , et de  $\mathcal{W}$ .
- (b) De calculer la distribution conjointe de  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ .
- (c) De déterminer si  $\mathcal{X}$  est indépendant de  $\mathcal{W}$ .  
Donner tout d'abord une réponse intuitive. Puis répondre rigoureusement en revenant à une définition de l'indépendance entre 2 variables aléatoires au travers des probabilités.
- (d) De déterminer si  $\mathcal{Y}$  est indépendant de  $\mathcal{W}$ .  
Donner tout d'abord une réponse intuitive (tenant compte des résultats du point précédent).  
Puis répondre rigoureusement.

A présent,  $r_1$  devient un paramètre libre alors que  $p_1 = 0.25$  et  $q_1 = 0.3$  restent fixés.

On demande:

- (e) De déterminer la valeur de  $r_1$  telle que  $\mathcal{X}$  est indépendant de  $\mathcal{Y}$ .
- (f) De donner les valeurs minimales et maximales que pourrait prendre  $r_1$  lorsque  $p_1$  et  $q_1$  sont fixés aux valeurs imposées. Répondre tout d'abord intuitivement, puis évaluer rigoureusement  $L = \min r_1$  et  $U = \max r_1$ .