Introduction aux processus stochastiques

Répétition : Filtre de Kalman

Estimation de position par GPS.

Description du système

(Author : Stephen Boyd – see Stanford Course ee363 : *Linear Dynamical Systems.*)
The Global Positioning System (GPS) uses 24 satellites in 6 different circular orbits 20200km above the surface of the earth. Each satellite completes its orbit in about 12 hours. Depending on the location and time, only some of the satellites (typically between 6 and 9) are in view ; the others are below the horizon. All the satellites transmit at the same frequency, but each uses a different pseudo-random code (a long sequence of 1s and -1s). This allows a GPS receiver to lock on to any satellite in view, and to measure the time of arrival of the satellite signal. The GPS signals also contain a low bit rate signal that gives position and other information for all the satellites. This means that once a receiver locks onto one satellite, it knows the positions of the others (after about one minute).
Each GPS satellite contains a very accurate atomic clock. Using a network of ground stations the US Air Force keeps all of them synchronized to a central group of atomic clocks in Boulder, Colorado. The ground stations also make sure the satellites stay on their orbits, and work out corrections to the satellite orbits that are transmitted in the satellite low bit rate signals.
GPS receivers use inexpensive crystal clocks which are not (at first) synchronized to the atomic clocks in Boulder. So a GPS receiver must estimate not just its position, but also its clock skew, i.e., the difference between the local clock time and GPS time. By subtracting the known time the GPS signal was sent from the time the signal was received, the receiver obtains an estimate of the signal travel time, i.e., its distance to the satellite divided by the speed of light, plus the clock offset. Multiplying by the speed of light, we have the measurement

$$\rho_i = ||s_i - x|| + c\tau + v_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Here ρ_i is the measured estimate of the distance to the ith satellite plus the clock offset τ (expressed as a distance), with an additive measurement error v_i (also expressed as a distance). The number of satellites in view is m, $s_i \in \mathbf{R}^3$ is the (known) position of satellite i, $x \in \mathbf{R}^3$ is the (unknown) receiver location, τ is the (unknown) receiver clock offset, and $c \sim 3 \cdot 10^8$ m/sec is the speed of light. The measurement ρ_i is called the *pseudo-range*. The goal is to estimate x and τ, from the pseudo-ranges.
Assuming the position x is known within 10km or so, the linearized model of the first term is quite accurate, so we'll work with the equations

$$\delta\rho_i = -\frac{s_i^T x}{||s_i||} + c\tau + v_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

where $\delta\rho_i$ is the difference between the measured pseudo-range and what the pseudo-range would be at the position $x = 0$, the point at which we form the linearization.
A new pseudo-range measurement is available every T seconds. We let $\delta\rho_i(j)$, $x(j)$, and $s_i(j)$ denote the linearized pseudo-range measurement, the receiver position, and the position of the satellite s_i at time jT , so we have

$$\delta\rho_i(j) = -\frac{s_i(j)^T x(j)}{||s_i(j)||} + c\tau + v_i(j), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots \tag{1}$$

(Here as assume for simplicity that T is much larger than the signal travel time.)
The measurement errors are independent, with $v_i(j) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2 I)$, where $\sigma_v = 10$ m.
The prior distribution for initial position $x(0)$ and clock offset τ is

$$x(0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2 I), \quad \sigma_x = 10^4\text{m}, \quad \tau \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\tau^2 I), \quad \sigma_\tau = 10^{-4}\text{s}.$$

(We assume $x(0)$ and τ are independent.)

Questions

On considère tout d'abord le cas où le récepteur a une position fixe : $x(t) = x(0)$ pour $t \geq 0$.
On suppose que 5 satellites sont visibles (donc $1 \leq i \leq m = 5$). On dispose de mesures sur 10 pas de temps ($\delta\rho_i(j)$, $1 \leq j \leq N = 10$), ainsi que de la position non fixe des 5 satellites ($s_i(j)$, $1 \leq j \leq N = 10$) lors de ces 10 mesures.

1. En rassemblant les mesures prises à l'instant j dans un vecteur $\boldsymbol{y}(j)$, $j = 1, \dots, 10$, et en rassemblant la position à l'instant j et l'offset dans un vecteur d'état $\boldsymbol{x}'(j) = [x(j)^T \ \tau]^T$, estimer la position et l'offset connaissant l'ensemble des mesures, ainsi que la covariance de l'erreur d'estimation, i.e.
$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}'(0) &= \mathbb{E}\{\boldsymbol{x}'(0)|\boldsymbol{y}(1), \boldsymbol{y}(2), \dots, \boldsymbol{y}(10)\}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{\text{est}} &= \mathbb{E}\{[\hat{\boldsymbol{x}}'(0) - \boldsymbol{x}'(0)][\hat{\boldsymbol{x}}'(0) - \boldsymbol{x}'(0)]^T\}.\end{aligned}$$
Utiliser les formules de l'estimation statique, en définissant le contenu des vecteurs et matrices mais sans effectuer de calcul matriciel explicite.
Donner en fonction de $\boldsymbol{\Sigma}_{\text{est}}$ l'écart-type sur l'erreur d'estimation sur chacune des 3 coordonnées de la position, et sur l'offset τ.
2. Même question, mais cette fois utiliser les formules du filtre de Kalman (voir Annexe).
Ceci revient à contruire $\hat{\boldsymbol{x}}'(0)$ par mises à jour successives, c'est-à-dire à calculer successivement
$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}'(0|1) = \hat{\boldsymbol{x}}'(1|1) &= \mathbb{E}\{\boldsymbol{x}'(0)|\boldsymbol{y}(1)\} = \mathbb{E}\{\boldsymbol{x}'(1)|\boldsymbol{y}(1)\},\\ \hat{\boldsymbol{x}}'(0|2) = \hat{\boldsymbol{x}}'(2|2) &= \mathbb{E}\{\boldsymbol{x}'(0)|\boldsymbol{y}(1), \boldsymbol{y}(2)\},\\ &\vdots\\ \hat{\boldsymbol{x}}'(0|10) = \hat{\boldsymbol{x}}'(10|10) &= \mathbb{E}\{\boldsymbol{x}'(0)|\boldsymbol{y}(1), \dots, \boldsymbol{y}(10)\} \triangleq \hat{\boldsymbol{x}}'(0),\end{aligned}$$
et de même à construire $\boldsymbol{\Sigma}_{\text{est}}$ par mises à jour successives.

A présent le récepteur est en mouvement. Le récepteur suit une dynamique stochastique donnée par
$$x(j+1) = Ax(j) + w(j)$$
où $A \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ est connu, et où $w(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2 I)$ est un bruit gaussien i.i.d.
La distribution de la position initiale est la même que précédemment.

3. Décrire l'algorithme permettant d'estimer au fil du temps $x(j)$, l'offset $\tau(j) = \tau$ supposé constant entre pas de temps successifs, ainsi que les écarts-types des erreurs d'estimation.

Annexe : Filtre de Kalman

Pour un système de la forme
$$\begin{aligned}x(t+1) &= A_t x(t) + B_t w(t) & w(t) &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_w) & x(0) &\sim \mathcal{N}(\bar{x}, \Sigma_{x_0})\\ y(t) &= C_t x(t) + v(t) & v(t) &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_v)\end{aligned}$$
avec $x(0)$, les $w(t)$ et les $v(t)$ mutuellement indépendants, on peut calculer
$$\hat{x}(t) = \mathbb{E}\{x(t)|y(0), y(1), \dots, y(t)\}$$
en utilisant l'estimation précédente $\hat{x}(t-1)$ et l'observation courante $y(t)$ recueillie au temps t.
On définit tout d'abord [1]
$$\begin{aligned}\hat{x}(t|t-1) &= \mathbb{E}\{x(t)|y(0), y(1), \dots, y(t-1)\} && \text{Prédiction de l'état}\\ \Sigma_{t|t-1} &= \mathbb{E}\{[x(t) - \hat{x}(t|t-1)][x(t) - \hat{x}(t|t-1)]^T\} && \text{Covariance de la prédiction}\\ \hat{x}(t|t) &= \mathbb{E}\{x(t)|y(0), y(1), \dots, y(t)\} \triangleq \hat{x}(t) && \text{Estimation de l'état}\\ \Sigma_{t|t} &= \mathbb{E}\{[x(t) - \hat{x}(t|t)][x(t) - \hat{x}(t|t)]^T\} && \text{Covariance de l'estimation.}\end{aligned}$$
En $t = 0$ on pose $\hat{x}(0|-1) = \bar{x}$ et $\Sigma_{0|-1} = \Sigma_{x_0}$.
En supposant qu'on dispose de $\hat{x}(t|t-1)$ et $\Sigma_{t|t-1}$, on calcule pour l'estimation
$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + \Sigma_{t|t-1} C_t^T [C_t \Sigma_{t|t-1} C_t^T + \Sigma_v]^{-1} [y(t) - C_t \hat{x}(t|t-1)]$$
$$[\text{ où } C_t \hat{x}(t|t-1) \text{ s'interprète en fait comme la prédiction de l'observation } \hat{y}(t|t-1) \triangleq \mathbb{E}\{y(t)|y(0), y(1), \dots, y(t-1)\ ]\ ,$$
$$\Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - \Sigma_{t|t-1} C_t^T [C_t \Sigma_{t|t-1} C_t^T + \Sigma_v]^{-1} C_t \Sigma_{t|t-1}\ ,$$
puis on calcule pour la prédiction
$$\hat{x}(t+1|t) = A_t \hat{x}(t|t)\ , \qquad \Sigma_{t+1|t} = A_t \Sigma_{t|t} A_t^T + B_t \Sigma_w B_t^T\ .$$

[1] Ces défi nitions ne seront pas rappelées à l'examen. Par contre $\hat{x}(t)$ est une notation abrégée à ne pas retenir, car suivant l'exercice elle pourrait désigner $\hat{x}(t|t-1)$ ou $\hat{x}(t|t)$.