Introduction aux processus stochastiques

Estimation statique

Estimation d'une source à l'aide de senseurs.

On considère une source x_1 et un senseur y_1 séparés par une distance d_{11}. La distribution a priori de x_1 est une normale de moyenne $\bar{x}$ et de variance σ_x^2, i.e. $x_1 \sim \mathcal{N}(\bar{x}, \sigma_x^2)$. L'effet de la source sur le senseur est inversement proportionnel au carré de la distance :

$$y_1 = \frac{x_1}{d_{11}^2} + v_1$$

où v_1 est un bruit de mesure distribué selon $\mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ et indépendant de x_1.
Valeurs numériques : $d_{11} = 1.2$, $\bar{x} = 1$, $\sigma_x^2 = 0.3$, $\sigma_v^2 = 0.1$.

1. Calculer l'espérance conditionnelle de x_1 sachant y_1, i.e. $\mathrm{E}(x_1|y_1)$ en fonction de la mesure y_1.
2. On prend $\hat{x_1} = \mathrm{E}(x_1|y_1)$ pour estimateur de x_1, et on définit l'erreur d'estimation $\tilde{x_1} = x_1 - \hat{x_1}$. Calculer l'espérance du carré de la norme de l'erreur d'estimation, i.e. $\mathrm{E}||\tilde{x_1}||^2$.
3. On ajoute un deuxième senseur y_2 distant de d_{12} par rapport à la source x_1 :

   $$y_2 = \frac{x_1}{d_{12}^2} + v_2$$

   où v_2 est un bruit de mesure distribué selon $\mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ et indépendant de x_1 et v_1. Calculer l'espérance conditionnelle de x_1 sachant y_1 et y_2. Prendre $\hat{x}_1' = \mathrm{E}(x_1|y_1, y_2)$ pour estimateur de x_1, et calculer $\mathrm{E}||x_1 - \hat{x}_1'||^2$.
   Valeurs numériques : $d_{12} = 1.5$.
4. Calculer l'espérance conditionnelle du senseur y_2 introduit au point précédent connaissant le senseur y_1, i.e. $\mathrm{E}(y_2|y_1)$ en fonction de y_1.
   Prendre $\hat{y}_2 = \mathrm{E}(y_2|y_1)$ comme estimateur de y_2 et calculer $\mathrm{E}||y_2 - \hat{y}_2||^2$.

Installation d'un senseur entre deux sources.

On considère deux sources x_1 et x_2 gaussiennes de moyenne 0 et de variance 1 et 2 respectivement. Les sources sont fortement corrélées, avec un facteur de corrélation $\rho_{12} = 0.8/\sqrt{2}$ (pour rappel, $\rho_{ij} = \Sigma_{ij}/\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$).

On veut placer un senseur y sur le segment de droite entre les sources. Selon sa localisation sur le segment, le senseur mesure

$$y = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 + v$$

où $0 < \alpha < 1$ est le paramètre de localisation, et v est un bruit indépendant de x_1 et x_2 tel que $v \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ avec $\sigma^2 = 0.1$.

1. Trouver à 0.1 près la valeur de α qui minimise l'espérance du carré de la norme de l'erreur d'estimation

   $$f(\alpha) = \mathrm{E}||x - \hat{x}||^2,$$

   où $x = [x_1 \quad x_2]^T$ et $\hat{x} = \mathrm{E}(x|y)$.
2. Le senseur est localisé d'après la valeur de $\alpha \in \{0, 0.1, \ldots, 1\}$ trouvée au point précédent.
   Estimer la valeur des deux sources si le senseur mesure 0.2.