Introduction aux processus stochastiques

Chaînes de Markov : exercices et applications

Warmup.

Soit la chaîne de Markov (π, Π) avec $\pi = \begin{bmatrix} .1 & .2 & .7 \end{bmatrix}$ et $\Pi = \begin{bmatrix} .3 & 0 & .7 \\ .2 & .8 & 0 \\ .5 & .5 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Tracer le diagramme de transition d'état de la chaîne de Markov.
   C'est un graphe dirigé, dont les noeuds sont les états de la chaîne et portent le numéro correspondant. On trouve un arc orienté du noeud i vers le noeud j si $\Pi_{ij} > 0$. Les arcs ij sont étiquetés avec la probabilité de transition Π_{ij}.
2. Déduire du graphe que la chaîne est irréductible et apériodique (définitions en annexe).
3. Donner une interprétation de l'élément ij de la matrice Π^k, pour k entier supérieur ou égal à 1.
4. Une chaîne de Markov irréductible et apériodique possède toujours une unique distribution stationnaire.
   Une distribution π_∞ stationnaire satisfait $\pi_\infty = \pi_\infty \Pi$.
   Calculer π_∞.

   (Solution : $\pi_\infty = \begin{bmatrix} .2899 & .5072 & .2029 \end{bmatrix}$)

Protéines distinctes présentes dans une séquence.

On considère des séquences de longueur N de protéines, avec M protéines différentes possibles.
On dispose d'un modèle chaîne de Markov (π, Π) qui reflète les règles de succession entre deux protéines de la séquence.
On veut connaître l'espérance du nombre de protéines distinctes qu'on peut trouver dans une séquence de longueur N.

1. Quelle est la probabilité p_j que la protéine j apparaisse dans une séquence de longueur N ?
2. Que vaut l'espérance de la fonction indicatrice $\mathcal{X}_A$ d'un événement A ?
   (La fonction indicatrice $\mathcal{X}_A$ d'un événement A est une variable aléatoire qui vaut 1 si l'événement survient, 0 sinon.)
3. Soit $\mathcal{Y} = \{1, 2, \ldots, M\}$ la variable aléatoire qui donne le nombre de protéines distinctes rencontrées sur une séquence de longueur N. Quelle est son espérance $\mathbf{E}\{\mathcal{Y}\}$?

Satisfait ou remboursé.

Un constructeur automobile en difficulté veut proposer une garantie "satisfait ou remboursé" pour doper les ventes d'un de ses modèles, la Lemon. Ce modèle introduit depuis 2 ans est critiqué par la presse spécialisée. Pour 1000 véhicules, on estime désormais que sur les 12 premiers mois d'utilisation 170 véhicules connaîtront une panne, 30 deux pannes, et 10 plus de deux pannes. Les pannes multiples sont toujours séparées d'au moins un mois.
La garantie consisterait à reprendre tout véhicule ayant connu sur les 36 premiers mois plus de

deux pannes imputables au constructeur.
Le constructeur pense que la probabilité de panne est la même de mois en mois, mais que cette probabilité change à chaque fois qu'une nouvelle panne survient.
Pour quantifier le risque à 36 mois, le constructeur veut construire un modèle du processus de panne à partir des probabilités sur 12 mois, puis l'utiliser pour évaluer la probabilité de plus de 2 pannes au cours des premiers 36 mois.
Il veut aussi pouvoir calculer le prix de la garantie qu'il pourrait vendre à d'anciens clients, sur base de l'âge et du nombre de pannes déjà encourues du véhicule... ce qui reviendra à calculer des probabilités conditionnelles.

Pour fixer les idées, introduisons l'événement et les variables aléatoires suivants :

A : "Une panne se produit au cours du mois".

$\mathcal{X}_t$: fonction indicatrice de A pour le mois t, qui vaut 1 si A se produit, 0 sinon.

$\mathcal{Y}_t = \sum_{\tau=1}^{t} \mathcal{X}_\tau$: nombre d'occurrences de A sur les t premiers mois.

1. Proposer un modèle type chaîne de Markov (π, Π) pour $\mathcal{Y}_t$ adapté au problème.
   Suggestion : identifier les états S_i pertinents pour le problème puis utiliser comme paramètres du modèle $p_i = P(A|\mathcal{Y}_t = S_i)$.
   Caractériser le modèle obtenu en répondant aux sous-questions suivantes (sans tenir compte d'éventuelles valeurs pathologiques des paramètres p_i) :
   (a) La chaîne de Markov du problème est-elle irréductible ? Qu'est-ce que cela signifie du point de vue des transitions entre états ?
   (b) On dit que S_i est un état récurrent si la chaîne de Markov y retourne infiniment souvent. Sinon on dit que S_i est un état transitoire, ce qui signifie que la chaîne de Markov ne peut y retourner qu'un nombre fini de fois. Caractériser les états de la chaîne de Markov du problème.
   (c) On dit que π_∞ (vecteur ligne dont les éléments somment à 1) est une distribution stationnaire si $\pi_\infty \Pi = \pi_\infty$, où Π est une matrice de transition. La théorie prévoit l'existence et l'unicité de π_∞ dans le cas d'une chaîne irréductible et apériodique. Pouvez-vous trouver ici une distribution stationnaire ? Est-elle unique ?
2. (a) Développer une méthode pour choisir les paramètres p_i tels que le modèle soit conforme aux données, i.e. $P(\mathcal{Y}_N = 1) = 0.17$, $P(\mathcal{Y}_N = 2) = 0.03$, $P(\mathcal{Y}_N > 2) = 0.01$ en $N = 12$. La valeur numérique des p_i n'est pas demandée.
   (b) Pour calculer numériquement A^k avec A diagonalisable , on utilise volontiers $A^k = VD^kV^{-1}$.
   Quelles sont les valeurs propres de la matrice de transition Π du problème ?
3. Etablir les formules qui donnent
   (a) La probabilité de plus de 2 pannes sur les 36 premiers mois,
   (b) La probabilité de plus de 2 pannes sur les 36 premiers mois, sachant qu'à ce jour (mois $t < 36$) aucune panne ne s'est produite.
   (c) La probabilité de plus de 2 pannes sur les 36 premiers mois, sachant qu'une première panne vient de se produire ce mois t.
   (d) La probabilité de plus de 2 pannes sur les 36 premiers mois, sachant qu'à ce jour (mois $t < 36$) seules deux pannes se sont produites aux mois t_1 et t_2 (avec $t_1 < t_2 \leq t$).

Chaînes de Markov indépendantes synchronisées.

Soit deux chaînes de Markov (π_A, Π_A) et (π_B, Π_B), définies sur resp. n_A et n_B états. Les chaînes sont initialisées simultanément et ont leur transition d'état simultanément. On a $\pi_A \in \mathbb{R}^{1\times n_A}$, $\pi_B \in \mathbb{R}^{1\times n_B}$, $\Pi_A \in \mathbb{R}^{n_A\times n_A}$, $\Pi_B \in \mathbb{R}^{n_B\times n_B}$. On veut remplacer ces deux chaînes par une seule chaîne (π, Π) à $n_A n_B$ états, numérotés $1, 2, \ldots, n_A n_B$, et étiquetés $(1,1), (1,2), \ldots, (1, n_B), (2,1), (2,2), \ldots, (n_A, n_B)$. Par exemple, l'état 3, étiqueté (1,3), signifie que la chaîne A est dans son état 1 et la chaîne B dans son état 3.
Pour répondre aux questions en conservant un formalisme matriciel, se référer à la définition et aux propriétés du produit de Kronecker en annexe.

1. Exprimer π et Π en fonction de π_A, π_B, Π_A et Π_B.
2. Exprimer Π^k en fonction de Π_A et Π_B.
3. Montrer que si Π_A et Π_B sont irréductibles, alors Π est irréductible.
4. Montrer que si les chaînes (π_A, Π_A) et (π_B, Π_B) sont apériodiques, alors la chaîne (π, Π) est apériodique.
5. Montrer que la chaîne (π, Π) possède une unique distribution stationnaire π_∞ si (π_A, Π_A) et (π_B, Π_B) sont toutes deux irréductibles et apériodiques. Exprimer π_∞ en fonction de la distribution stationnaire de A et de B.
6. Supposons qu'on veuille changer la numérotation des états des chaînes A et B. Par exemple, pour que les états [1 2 3] soient renumérotés [2 3 1], une distribution $p = [p_1 \ p_2 \ p_3]$ doit devenir $p' = [p_2 \ p_3 \ p_1]$, ce qu'on peut obtenir en définissant $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ puis en exprimant $p' = pP$.
   Supposer données les matrices de permutation P_A et P_B qui fixent la renumérotation, de sorte que $\pi'_A = \pi_A P_A$ et $\pi'_B = \pi_A P_B$. Exprimer Π'_A et Π'_B en fonction de Π_A et P_A, Π_B et P_B, pour que les matrices de transitions restent équivalentes à la renumérotation près.
   Donner la matrice de permutation P qui permet de renuméroter la chaîne (π, Π).

Séries matricielles utiles.

Soit A une matrice carrée supposée diagonalisable. Calculer et déduire en cours de calcul les conditions d'existence de

1. $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} kA^{k-1}$,
3. $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 A^{k-1}$

Les résultats obtenus sont en fait valides même si A n'est pas diagonalisable.
Il suffit que le rayon spectral de A soit strictement inférieur à 1.

Longueur d'un polymère.

Un industriel veut évaluer l'intérêt d'un processus de production d'un polymère linéaire (séquence de monomères), surtout du point de vue de la longueur des polymères obtenus, exprimée en nombre de monomères. Il y a 3 monomères M_1, M_2, M_3. Les polymères croissent à partir d'un monomère M_1 fixé à une paroi. Un monomère peut venir s'accrocher à l'extrémité libre d'un polymère en croissance, mais deux polymères en croissance ne peuvent se combiner.
A l'extrémité libre M_i vient s'accrocher un monomère M_j avec une probabilité A_{ij} :

$$A = \begin{bmatrix} .5 & .2 & .3 \\ .1 & 0 & .9 \\ .2 & .3 & .45 \end{bmatrix}.$$

Avec une probabilité 0.05, l'extrémité libre M_3 ne parvient plus à établir de nouvelle liaison, et le polymère cesse définitivement de croître.

1. Identifier les états pertinents pour le problème et établir un modèle chaîne de Markov (π, Π) pour le processus de croissance.
2. Calculer la probabilité p_N d'avoir en fin de croissance un polymère de longueur N.
3. Calculer l'espérance de la longueur d'un polymère.
4. Calculer l'écart-type de la longueur d'un polymère.
5. Dans une variante du problème, les monomères ont des contributions différentes à la longueur.
   Les monomères M_1, M_2, M_3 mesurent respectivement 21 μm, 42 μm et 63 μm.
   Comment faire pour calculer l'espérance et l'écart-type de la longueur du polymère (en μm) dans ces conditions ? Les valeurs numériques ne sont pas demandées.

Explore and Collide.

Deux équipes concurrentes A et B parachutent simultanément un robot pour explorer la surface d'une zone convoitée. La zone est découpée en sous-secteurs $1 \leq i \leq N$. Des obstacles bloquent le passage entre certains sous-secteurs voisins ; des tunnels permettent le passage entre certains sous-secteurs distants, des pentes imposent un passage à sens unique entre certains sous-secteurs.
Chacun des robots dispose d'une loi de commande identique, fixée a priori, qui spécifie pour chaque sous-secteur i la probabilité d'explorer le sous-secteur j au pas de temps suivant.
Quel est, en nombre de pas de temps, le temps d'exploration espéré, pendant lequel les deux robots communiquent les données acquises à leur équipe respective, avant que les robots n'arrivent dans un même sous-secteur et ne se neutralisent mutuellement ?
Et quelle est la probabilité que la collision survienne sur le sous-secteur $1 \leq i \leq N$?
On suppose que la loi de commande fait en sorte que tout sous-secteur j est joignable à partir d'un autre sous-secteur i en un nombre fini d'étape.
On suppose aussi que les temps de retour à tout secteur j (nombre de pas de temps pour sortir de j et y revenir) ne sont pas systématiquement multiples de $k \geq 2$.

Modélisation :
On se donne les distributions initiales π_A et π_B.
L'élément i des distributions initiales π_A et π_B donne respectivement pour le robot A et pour le

robot B la probabilité d'être parachuté sur le sous-secteur i.
La loi de transition entre sous-secteurs est donnée par la matrice de transition Π_S, dont l'élément ij donne la probabilité de passer de i en j.
Les hypothèses impliquent que les chaînes de Markov (π_A, Π_S) et (π_B, Π_S) sont irréductibles et apériodiques.

Méthode conseillée :

1. Définir un espace d'état pertinent pour le problème.
   Constater que certains de ces états correspondent à la collision entre les robots sur un certain sous-secteur.
   Montrer que la dynamique dans le nouvel espace d'état est celle d'une chaîne de Markov (π, Π). Il suffit d'expliquer comment π et Π doivent être construites (donner aussi les dimensions) et leurs éléments interprétés.
   Suggestions :
   - Partir de l'exercice Chaînes de Markov indépendantes synchronisées.
   - Expliquer comment modifier la matrice de transition pour que les états correspondant à une collision entre robots dans un sous-secteur $1 \leq i \leq N$ soient renumérotés de 1 à N.
   - Expliquer comment modifier la matrice de transition pour que les robots restent bloqués dans le sous-secteur de la première collision. Grâce à la renumérotation, les modifications peuvent être facilement exprimées en décomposant la matrice de transition en blocs, et en remplaçant certains blocs, ce qui donne $\Pi = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ avec A de dimension $N \times N$.
2. Calculer la probabilité p_t que la première collision ait lieu à l'instant t, pour $t \geq 1$.
   La probabilité que la première collision ait lieu à l'instant 0 correspond au cas où les robots sont parachutés sur le même sous-secteur, mais elle n'est pas utile pour la suite de la question.
   Suggestion : n'utiliser qu'une partie de la distribution initiale π dans les calculs et tirer parti du partitionnement en bloc de Π. En effet, certains éléments de π doivent être mis à 0 pour empêcher qu'une collision soit possible à l'instant 0 alors qu'on veut calculer la probabilité d'une collision à un instant t ultérieur ! Il est alors préférable d'extraire de π un vecteur plus petit $\tilde{\pi}$ qui ne reprend pas ces éléments. Vérifier les dimensions dans les multiplications avec certains blocs de Π.
   La réponse est à exprimer en fonction de $\tilde{\pi}$ (vecteur ligne) , de certains blocs de Π, et d'un vecteur colonne de 1 pour effectuer une somme sur les éléments d'un vecteur ligne.
3. Calculer l'espérance du temps avant collision : $\mathbf{E}\{t_{\text{hit}}\} = \sum_{t=0}^{\infty} t \cdot p_t$.
   Suggestion : se référer à l'exercice Séries matricielles utiles. La vérification des hypothèses de l'exercice n'est pas demandée.
   La réponse est à exprimer en fonction de $\tilde{\pi}$, certains blocs de Π, et un vecteur colonne de 1.
4. Calculer la probabilité que la première collision surviennent au sous-secteur i.
   Suggestion : La matrice de transition Π est construite telle que les robots restent bloqués à leur première collision. La matrice de transition $\lim_{n \to \infty} \Pi^n$ a donc une interprétation intéressante.

Annexe

Matrices non négatives, positives, irréductibles.

A est dite non négative si $a_{ij} \geq 0$.

Une matrice A est dite positive si $a_{ij} > 0$.

Une matrice non négative A est irréductible s'il existe un entier k tel que A^l est positive pour tout $l \geq k$.

Ne pas confondre matrice non négative avec matrice semi-définie positive.

Ne pas confondre matrice positive avec matrice définie positive.

Chaînes de Markov irréductibles, apériodiques.

Une chaîne de Markov est irréductible s'il est possible de passer de tout état i à tout état j en un nombre fini d'étapes.

Une chaîne de Markov irréductible a sa matrice de transition Π irréductible (pourquoi ?).

Un état j est périodique de période $k \geq 2$ si l'ensemble des temps de retour (i.e. nombre de transitions nécessaires) d'un état i vers lui-même est un multiple de $k \geq 2$. Sinon $k = 1$ et l'état est apériodique.

Une chaîne de Markov est apériodique si tous ses états sont apériodiques.

Matrices diagonalisables.

Soit A une matrice carrée diagonalisable. On peut donc écrire $AV = VD$ avec D une matrice diagonale contenant les valeurs propres de A, et V une matrice carrée non singulière (i.e. V^{-1} existe) dont les colonnes sont les vecteurs propres correspondants.

Rayon spectral d'une matrice.

On appelle rayon spectral d'une matrice A le maximum en module des valeurs propres de A, et on le note $\rho(A)$. Bien sûr $\rho(A)$ est supérieur ou égal au module de toute valeur propre de A.

Séries de puissances.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1/(1-x)$ si $|x| < 1$, et il est licite de dériver les deux membres pour obtenir d'autres séries. L'intervalle de convergence est alors le même que celui de la série de départ, c'est-à-dire $]-1, 1[$.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1/(1-z)$ si $||z|| < 1$, et il est licite de dériver les deux membres pour obtenir d'autres séries. Le rayon de convergence est alors le même que celui de la série de départ, c'est-à-dire 1.

Pour $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on a $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)$ si $\rho(A) < 1$.

Pour dériver de cette série d'autres séries, on peut supposer par commodité que A est diagonalisable et travailler avec $A = VDV^{-1}$.

Puisque $A^k = VD^kV^{-1}$, la série à dériver s'applique seulement aux valeurs propres.

Le résultat obtenu sera valide plus généralement, i.e. sous la seule hypothèse que $\rho(A) < 1$.

Produit de Kronecker.

Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $p \times q$. La matrice $mp \times nq$ définie par

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

est appelée produit de Kronecker entre A et B ; elle est notée $A \otimes B$.

Dans MATLAB, elle est obtenue par `kron(A,B)`.

Attention, en général $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Propriétés du produit de Kronecker.

$$A \otimes B \otimes C = (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) \tag{1}$$

$$(A + B) \otimes (C + D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D \tag{2}$$

si $A + B$ et $C + D$ existent.

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \quad \text{si } AC \text{ et } BD \text{ existent.} \tag{3}$$

Transposition : $$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T \tag{4}$$

Inversion : $$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \quad \text{si } A \text{ et } B \text{ sont non singulières.} \tag{5}$$

Partitionnement : $$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11} \otimes B & A_{12} \otimes B \\ A_{21} \otimes B & A_{22} \otimes B \end{bmatrix} \tag{6}$$