Introduction aux processus stochastiques

Indépendance conditionnelle

Soient 7 variables aléatoires discrètes $\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$.
Leur distribution de probabilité conjointe se factorise selon
$P(\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = P(\mathcal{X})P(\mathcal{Z})P(\mathcal{Y}|\mathcal{X}, \mathcal{Z})P(\mathcal{W}|\mathcal{Z})P(\mathcal{U}|\mathcal{Y})P(\mathcal{T}|\mathcal{Y}, \mathcal{W})P(\mathcal{V}|\mathcal{T})$.

1. Tracer le réseau bayesien correspondant à cette distribution de probabilité.
   C'est un graphe dirigé, dont les noeuds correspondent aux variables alétoires et portent le nom correspondant. Toute probabilité de la forme $P(\mathcal{X}_0|\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n)$ induit n arcs dirigés de $\mathcal{X}_i$ à $\mathcal{X}_0$, $1 \leq i \leq n$.
   Remarques :
   Une fois tous les arcs dirigés placés, il n'y a pas de cycle orienté.
   On place généralement les noeuds sans arc incident en haut ou à gauche du graphe.
2. Montrer qu'on n'a pas forcément $\mathcal{V} \perp \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}|\mathcal{Z}$, c'est-à-dire qu'on n'a pas forcément l'indépendance de $\mathcal{V}$ avec $\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$ conditionnellement à $\mathcal{Z}$.
   Raisonner à partir du réseau bayesien en faisant appel aux notions de communication bloquée et de d-séparation (cours 3, visuels 10–12).
3. A-t-on nécessairement
   $\mathcal{W} \perp \mathcal{Y}|\mathcal{Z}$?
   $\mathcal{U} \perp \{\mathcal{W}, \mathcal{Z}\}|\mathcal{Y}$?
   $\mathcal{U} \perp \mathcal{W}|\{\mathcal{T}, \mathcal{Z}\}$?

Soient 6 variables aléatoires discrètes $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$.
Leur distribution de probabilité conjointe se factorise selon
$P(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = P(\mathcal{A})P(\mathcal{B}|\mathcal{E})P(\mathcal{C}|\mathcal{E})P(\mathcal{D}|\mathcal{B}, \mathcal{C})P(\mathcal{E})P(\mathcal{F}|\mathcal{C})$.
A-t-on nécessairement

1. $\mathcal{B} \not\perp \mathcal{C}|\mathcal{D}$?
   $\mathcal{E} \perp \{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$?
   $\mathcal{A} \perp \mathcal{E}|\mathcal{C}$?
   $\{\mathcal{A}, \mathcal{E}\} \perp \{\mathcal{D}, \mathcal{F}\}|\{\mathcal{B}, \mathcal{C}\}$?