Introduction aux processus stochastiques

Examen 2e session — 2008

Durée : 2h30. Pas de gsm ni de calculatrice.
Répondre aux questions sur feuilles séparées.

1 Chaînes de Markov

On considère les variables aléatoires $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, ..., à valeur dans $\{1, \ldots, n\}$, et formant une chaîne de Markov stationnaire $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{\Pi})$.
Pour rappel, $\boldsymbol{\pi}$ est un vecteur ligne de n éléments tel que $\pi_i = \mathrm{P}(\mathcal{X}_1 = i)$, et $\mathbf{\Pi}_{ij}$ est une matrice de transition $n \times n$ telle que $\Pi_{ij} = \mathrm{P}(\mathcal{X}_{t+1} = j | \mathcal{X}_t = i)$.
On suppose qu'on observe que la valeur de $\mathcal{X}_5$ vaut j (avec j un entier fixé entre 1 et n). Les autres valeurs pour $\mathcal{X}_t$, $t \neq 5$, ne sont pas observées.
On demande :

1. De calculer la distribution de $\mathcal{X}_8$ conditionnellement à $\mathcal{X}_5 = j$, c'est-à-dire de déterminer l'expression du vecteur ligne
$$\boldsymbol{p}_8 \triangleq [\mathrm{P}(\mathcal{X}_8 = 1 | \mathcal{X}_5 = j) \quad \mathrm{P}(\mathcal{X}_8 = 2 | \mathcal{X}_5 = j) \quad \ldots \quad \mathrm{P}(\mathcal{X}_8 = n | \mathcal{X}_5 = j)].$$
2. De calculer efficacement la distribution de $\mathcal{X}_2$ conditionnellement à $\mathcal{X}_5 = j$, c'est-à-dire de déterminer l'expression du vecteur ligne
$$\boldsymbol{p}_2 \triangleq [\mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = 1 | \mathcal{X}_5 = j) \quad \mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = 2 | \mathcal{X}_5 = j) \quad \ldots \quad \mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = n | \mathcal{X}_5 = j)]$$
en fonction de $\boldsymbol{\pi}$ et $\mathbf{\Pi}$. *(Suggestion : propagations α et β.)*
3. De déduire des points précédents les espérances conditionnelles de $\mathcal{X}_2$ et $\mathcal{X}_8$,
c'est-à-dire $\mathbb{E}\{\mathcal{X}_2 | \mathcal{X}_5 = j\}$ et $\mathbb{E}\{\mathcal{X}_8 | \mathcal{X}_5 = j\}$.

2 Estimation statique

Soit $f_{\boldsymbol{a}}(t)$ une fonction périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par
$$f_{\boldsymbol{a}}(t) = \sum_{k=1}^{4} a_k \sin(k\pi t)$$
et paramétrée par le vecteur de coefficients $\boldsymbol{a} = [a_1\ a_2\ a_3\ a_4]^T \in \mathbb{R}^4$.
Les a_k sont mutuellement indépendants, et suivent une distribution normale de moyenne 0 et de variance $1/k^2$, de sorte que $f_{\boldsymbol{a}}(t)$ est en fait une fonction de t aléatoire.
On suppose que le vecteur $\boldsymbol{a}$ est tiré une fois pour toute mais n'est pas observé.

On demande (sans calculs numériques mais en justifiant les raisonnements) :

1. D'estimer la valeur de $f_{\boldsymbol{a}}(t)$ en $t = 0.6$.
Prendre pour estimateur $\mathbb{E}\{f_{\boldsymbol{a}}(0.6)\}$.
2. De calculer l'écart-type de l'erreur d'estimation.

On suppose à présent qu'on a accès aux valeurs de $f_{\boldsymbol{a}}(t)$ en $t = 0.2$, $t = 0.4$, $t = 0.6$.
On demande (toujours sans calculs numériques) :

3. D'estimer la valeur de $f_{\boldsymbol{a}}(t)$ en $t = 0.8$ connaissant $f_{\boldsymbol{a}}(t)$ en $t = 0.2$, $t = 0.4$, $t = 0.6$.
Prendre pour estimateur $\mathbb{E}\{f_{\boldsymbol{a}}(0.8) \mid f_{\boldsymbol{a}}(0.2), f_{\boldsymbol{a}}(0.4), f_{\boldsymbol{a}}(0.6)\}$.
4. De calculer l'écart-type de l'erreur d'estimation.

Bon travail.

Solutions

Chaînes de Markov

1. Soit $\boldsymbol{e}_j$ le vecteur colonne unitaire de dimension n dont l'élément j vaut 1, et dont la transposée peut être vue comme la distribution de $\mathcal{X}_5$ lorsque $\mathcal{X}_5 = j$.
   Comme 3 transitions d'état séparent $\mathcal{X}_8$ de $\mathcal{X}_5$, on a directement (extraction de la ligne j de $\boldsymbol{\Pi}^3$)
   $$\boldsymbol{p}_8 = [\mathrm{P}(\mathcal{X}_8 = 1|\mathcal{X}_5 = j) \quad \ldots \quad \mathrm{P}(\mathcal{X}_8 = n|\mathcal{X}_5 = j)] = \boldsymbol{e}_j^T \Pi^3 \ .$$

2. On a
   $$\mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = i|\mathcal{X}_5 = j) = \frac{\mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = i, \mathcal{X}_5 = j)}{\sum_i \mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = i, \mathcal{X}_5 = j)}$$
   $$\mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = i, \mathcal{X}_5 = j) = \mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = i)\mathrm{P}(\mathcal{X}_5 = j|\mathcal{X}_2 = i) \ .$$
   On a $\mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = i)$ l'élément i du vecteur $\boldsymbol{\pi\Pi}$ (obtenu directement ou par un raisonnement type propagation α), et $\mathrm{P}(\mathcal{X}_5 = j|\mathcal{X}_2 = i)$ l'élément i du vecteur $\boldsymbol{e}_j^T(\boldsymbol{\Pi}^T)^3$ (obtenu directement : extraction de la colonne j de $\boldsymbol{\Pi}^3$ c'est-à-dire $\boldsymbol{\Pi}^3\boldsymbol{e}_j$ suivie d'une transposition, ou bien obtenu par un raisonnement type propagation β). Ainsi, en utilisant $*$ pour le produit élément par élément, et $\mathbf{1}$ le vecteur colonne de dimension n peuplé de 1,
   $$[\mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = 1, \mathcal{X}_5 = j) \quad \ldots \quad \mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = n, \mathcal{X}_5 = j)] = (\boldsymbol{\pi\Pi}) * (\boldsymbol{e}_j^T(\boldsymbol{\Pi}^T)^3)$$
   $$\text{et} \quad \boldsymbol{p}_2 = [\mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = 1|\mathcal{X}_5 = j) \quad \ldots \quad \mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = n|\mathcal{X}_5 = j)] = \frac{(\boldsymbol{\pi\Pi}) * (\boldsymbol{e}_j^T(\boldsymbol{\Pi}^T)^3)}{[(\boldsymbol{\pi\Pi}) * (\boldsymbol{e}_j^T(\boldsymbol{\Pi}^T)^3)]\mathbf{1}} \ .$$

3. Soit $\boldsymbol{y} = [1\ 2\ \ldots\ n]^T$. Il vient directement
   $$\mathbb{E}\{\mathcal{X}_2|\mathcal{X}_5 = j\} = \boldsymbol{p}_2\,\boldsymbol{y}, \qquad\qquad \mathbb{E}\{\mathcal{X}_8|\mathcal{X}_5 = j\} = \boldsymbol{p}_8\,\boldsymbol{y} \ .$$

Estimation statique

On pose $\boldsymbol{A}_t \triangleq [\sin(\pi t)\ \ \sin(2\pi t)\ \ \sin(3\pi t)\ \ \sin(4\pi t)]$.

On note que $\boldsymbol{a} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ avec $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/16 \end{bmatrix}$.

1. Comme $f_{\boldsymbol{a}}(t) = \boldsymbol{A}_t\ \boldsymbol{a}$, l'estimateur est $\mathbb{E}\{f_{\boldsymbol{a}}(0.6)\} = \mathbb{E}\{A_{0.6}\boldsymbol{a}\} = A_{0.6}\mathbb{E}\{\boldsymbol{a}\} = 0$.
2. L'écart-type de l'erreur d'estimation est

$$\sigma = \left[\mathbb{E}\{||f_{\boldsymbol{a}}(0.6) - \mathbb{E}\{f_{\boldsymbol{a}}(0.6)\}\}||^2\right]^{1/2} = \left[\mathbb{E}\{||f_{\boldsymbol{a}}(0.6)\}||^2\right]^{1/2} = \sqrt{\boldsymbol{A}_{0.6}\boldsymbol{\Sigma} A_{0.6}^T}\ ,$$

   en utilisant la linéarité de l'espérance, et les propriétés de la trace.

3. On pose $x = f_{\boldsymbol{a}}(0.8)$ et $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{0.8}$, ainsi que $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} f_{\boldsymbol{a}}(0.2) \\ f_{\boldsymbol{a}}(0.4) \\ f_{\boldsymbol{a}}(0.6) \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{0.2} \\ \boldsymbol{A}_{0.4} \\ \boldsymbol{A}_{0.6} \end{bmatrix}$.

   On peut alors écrire $\begin{bmatrix} x \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \boldsymbol{a}$. Le vecteur $\begin{bmatrix} x \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$ suit $\mathcal{N}(\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\boldsymbol{y}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{S})$ avec

$$\bar{x} = \boldsymbol{A}\mathbb{E}\{\boldsymbol{a}\} = 0, \qquad \bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C}\mathbb{E}\{\boldsymbol{a}\} = 0,$$

$$\boldsymbol{S} = \mathbb{E}\{\begin{bmatrix} x \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}^T\} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \Sigma \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A\Sigma A}^T & \boldsymbol{A\Sigma C}^T \\ \boldsymbol{C\Sigma A}^T & \boldsymbol{C\Sigma C}^T \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \Sigma_x & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xy}^T & \Sigma_y \end{bmatrix}\ .$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{f_{\boldsymbol{a}}(0.8) \mid f_{\boldsymbol{a}}(0.2), f_{\boldsymbol{a}}(0.4), f_{\boldsymbol{a}}(0.6)\} &= \mathbb{E}\{x|\boldsymbol{y}\} = \bar{x} + \boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_y^{-1}(\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}) \\ &= \boldsymbol{A\Sigma C}^T(\boldsymbol{C\Sigma C}^T)^{-1} \begin{bmatrix} f_{\boldsymbol{a}}(0.2) \\ f_{\boldsymbol{a}}(0.4) \\ f_{\boldsymbol{a}}(0.6) \end{bmatrix}\ . \end{aligned}$$

4. En utilisant les notations introduites aux points précédents, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\mathbb{E}\{||f_{\boldsymbol{a}}(0.8) - \mathbb{E}\{f_{\boldsymbol{a}}(0.8) \mid f_{\boldsymbol{a}}(0.2), f_{\boldsymbol{a}}(0.4), f_{\boldsymbol{a}}(0.6)\}||^2\}\}} \\ &= \sqrt{\Sigma_x - \Sigma_{xy}\Sigma_y\Sigma_{xy}^T} = \sqrt{\boldsymbol{A\Sigma A}^T - \boldsymbol{A\Sigma C}^T(\boldsymbol{C\Sigma C}^T)^{-1}\boldsymbol{C\Sigma A}^T}\ . \end{aligned}$$