Introduction aux processus stochastiques

Examen 2e session — 2008

Durée : 2h30. Pas de gsm ni de calculatrice.
Répondre aux questions sur feuilles séparées.

1 Chaînes de Markov

On considère les variables aléatoires $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, …, à valeur dans $\{1, \ldots, n\}$, et formant une chaîne de Markov stationnaire $(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\Pi})$.
Pour rappel, $\boldsymbol{\pi}$ est un vecteur ligne de n éléments tel que $\pi_i = \mathrm{P}(\mathcal{X}_1 = i)$, et $\boldsymbol{\Pi}_{ij}$ est une matrice de transition $n \times n$ telle que $\Pi_{ij} = \mathrm{P}(\mathcal{X}_{t+1} = j | \mathcal{X}_t = i)$.
On suppose qu'on observe que la valeur de $\mathcal{X}_5$ vaut j (avec j un entier fixé entre 1 et n). Les autres valeurs pour $\mathcal{X}_t$, $t \neq 5$, ne sont pas observées.
On demande :

1. De calculer la distribution de $\mathcal{X}_8$ conditionnellement à $\mathcal{X}_5 = j$, c'est-à-dire de déterminer l'expression du vecteur ligne
$$\boldsymbol{p}_8 \triangleq [\mathrm{P}(\mathcal{X}_8 = 1 | \mathcal{X}_5 = j) \quad \mathrm{P}(\mathcal{X}_8 = 2 | \mathcal{X}_5 = j) \quad \ldots \quad \mathrm{P}(\mathcal{X}_8 = n | \mathcal{X}_5 = j)].$$
2. De calculer efficacement la distribution de $\mathcal{X}_2$ conditionnellement à $\mathcal{X}_5 = j$, c'est-à-dire de déterminer l'expression du vecteur ligne
$$\boldsymbol{p}_2 \triangleq [\mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = 1 | \mathcal{X}_5 = j) \quad \mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = 2 | \mathcal{X}_5 = j) \quad \ldots \quad \mathrm{P}(\mathcal{X}_2 = n | \mathcal{X}_5 = j)]$$
en fonction de $\boldsymbol{\pi}$ et $\boldsymbol{\Pi}$. *(Suggestion : propagations α et β.)*
3. De déduire des points précédents les espérances conditionnelles de $\mathcal{X}_2$ et $\mathcal{X}_8$,
c'est-à-dire $\mathbb{E}\{\mathcal{X}_2 | \mathcal{X}_5 = j\}$ et $\mathbb{E}\{\mathcal{X}_8 | \mathcal{X}_5 = j\}$.

2 Estimation statique

Soit $f_{\boldsymbol{a}}(t)$ une fonction périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par
$$f_{\boldsymbol{a}}(t) = \sum_{k=1}^{4} a_k \sin(k\pi t)$$
et paramétrée par le vecteur de coefficients $\boldsymbol{a} = [a_1\ a_2\ a_3\ a_4]^T \in \mathbb{R}^4$.
Les a_k sont mutuellement indépendants, et suivent une distribution normale de moyenne 0 et de variance $1/k^2$, de sorte que $f_{\boldsymbol{a}}(t)$ est en fait une fonction de t aléatoire.
On suppose que le vecteur $\boldsymbol{a}$ est tiré une fois pour toute mais n'est pas observé.

On demande (sans calculs numériques mais en justifiant les raisonnements) :

1. D'estimer la valeur de $f_{\boldsymbol{a}}(t)$ en $t = 0.6$.
Prendre pour estimateur $\mathbb{E}\{f_{\boldsymbol{a}}(0.6)\}$.
2. De calculer l'écart-type de l'erreur d'estimation.

On suppose à présent qu'on a accès aux valeurs de $f_{\boldsymbol{a}}(t)$ en $t = 0.2$, $t = 0.4$, $t = 0.6$.
On demande (toujours sans calculs numériques) :

3. D'estimer la valeur de $f_{\boldsymbol{a}}(t)$ en $t = 0.8$ connaissant $f_{\boldsymbol{a}}(t)$ en $t = 0.2$, $t = 0.4$, $t = 0.6$.
Prendre pour estimateur $\mathbb{E}\{f_{\boldsymbol{a}}(0.8) \mid f_{\boldsymbol{a}}(0.2), f_{\boldsymbol{a}}(0.4), f_{\boldsymbol{a}}(0.6)\}$.
4. De calculer l'écart-type de l'erreur d'estimation.

Bon travail.