Introduction aux processus stochastiques

Examen — 2008

Durée : 3h30. Pas de gsm ni de calculatrice.
Répondre aux 3 questions sur feuilles séparées.

1 Chaînes de Markov cachées

Soit une chaîne de Markov cachée invariante dans le temps (π, Π, Σ), comportant 5 états numérotés de 1 à 5, et 8 observations numérotées de 1 à 8.
On note $\mathcal{X}_t$ la séquence des états cachés et $\mathcal{Y}_t$ la séquence des observations, pour $t = 1, 2, \ldots$
Pour rappel,

$$\pi_i = P(\mathcal{X}_1 = i) \qquad \Pi_{ij} = P(\mathcal{X}_{t+1} = j|\mathcal{X}_t = i) \qquad \Sigma_{ij} = P(\mathcal{Y}_t = j|\mathcal{X}_t = i).$$

Les valeurs numériques pour π, Π, Σ sont supposées connues.
On observe la séquence (incomplète) suivante :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_t	3	5	2	?	?	7	4	3	?	?

Les observations manquantes sont indiquées par un point d'interrogation.

Présenter les réponses en reprenant à la suite des développements la séquence explicite des calculs à effectuer (sauf les calculs déjà décrits pour une autre sous-question).
Définir les opérateurs utilisés et indiquer la dimension des vecteurs introduits.

On demande de calculer de façon efficace, pour $i = 1, 2, \ldots, 5$

1. Les probabilités $P(\mathcal{X}_4 = i)$,
2. Les probabilités $P(\mathcal{X}_4 = i|\mathcal{Y}_1 = 3, \mathcal{Y}_2 = 5, \mathcal{Y}_3 = 2)$,
3. Les probabilités $P(\mathcal{X}_4 = i|\mathcal{Y}_1 = 3, \mathcal{Y}_2 = 5, \mathcal{Y}_3 = 2, \mathcal{Y}_6 = 7, \mathcal{Y}_7 = 4, \mathcal{Y}_8 = 3)$.

Calculer également pour $j = 1, \ldots, 8$

4. $P(\mathcal{Y}_4 = j|\mathcal{Y}_1 = 3, \mathcal{Y}_2 = 5, \mathcal{Y}_3 = 2, \mathcal{Y}_6 = 7, \mathcal{Y}_7 = 4, \mathcal{Y}_8 = 3)$.

Rappels :
- La propagation α se base sur le calcul de $P(\mathcal{X}_t = k, Y_1, \ldots, Y_t)$ en $t = 1, 2, \ldots$
- La propagation β se base sur le calcul de $P(Y_{t+1}, \ldots, Y_N|\mathcal{X}_t = k)$ en $t = N-1, N-2, \ldots$

2 Estimation statique

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire distribué selon $\mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_x)$.
Soient $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^q$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^r$ des vecteurs de bruits gaussiens :

$$\boldsymbol{u} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_u), \qquad \boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_v), \qquad \boldsymbol{w} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_w).$$

Soient $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^t$ tels que

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{w}.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ sont mutuellement indépendents.

Calculer $\mathbb{E}\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{h}\}$ et $\mathbb{E}\{||\boldsymbol{y} - \mathbb{E}\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{h}\}||^2\}$.

3 Filtre de Kalman

Estimation d'une série autorégressive à l'aide de mesures saturées.

On considère un processus stochastique à temps discret $z(t)$ dont la dynamique est contrôlée par un processus de bruit $w(t)$:

$$\begin{aligned} z(t+1) = 2.4\ z(t) - 2.17\ z(t-1) + 0.712\ z(t-2) + w(t), \\ w(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2), \quad \sigma_w^2 = 1 \ . \end{aligned}$$

Le processus est initialisé par

$$\boldsymbol{x}(0) \triangleq \begin{bmatrix} z(0) \\ z(-1) \\ z(-2) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_0) \qquad \mathbf{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 82.2144 & 73.6595 & 50.8231 \\ 73.6595 & 82.2144 & 73.6595 \\ 50.8231 & 73.6595 & 82.2144 \end{bmatrix} .$$

A chaque instant $t = 0, 1, \ldots$ on mesure $y(t) = f(z(t)) + v(t)$ avec

$$f(z) = \frac{1}{1 + \exp\{-0.2\ z\}} \in [0, 1] \ , \qquad v(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2), \quad \sigma_v^2 = 0.025 \ .$$

La condition initiale $\boldsymbol{x}(0)$, les $w(0), w(1), \ldots$ et les $v(0), v(1), \ldots$ sont mutuellement indépendants.

1. Mettre la dynamique sous la forme $\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{A}_t \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_t w(t)$,
   en précisant la définition de $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{A}_t$ et $\boldsymbol{B}_t$.
2. Linéariser $f(z)$ autour d'un point z_0 arbitraire, i.e. calculer

   $$f(z) \simeq f(z_0) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} \cdot (z - z_0) \ .$$

   En déduire l'expression des $\boldsymbol{C}_t$ et d_t qui permettent de linéariser l'équation de mesure autour d'un $z_0(t)$ arbitraire sous la forme $y(t) \simeq \boldsymbol{C}_t \boldsymbol{x}(t) + d_t + v(t)$.
3. On recueille $y(0), y(1), \ldots$ au fur et à mesure. Décrire un algorithme permettant d'estimer au mieux $z(t)$ en tenant compte des mesures $y(0), \ldots, y(t)$ dont les valeurs numériques sont supposées connues.
   Indication :
   Linéariser $y(t)$ autour de la *prédiction* pour $z(t)$, connaissant $y(1), \ldots, y(t-1)$.

Rappel : Filtre de Kalman

Système considéré :

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A_t x(t) + B_t w(t) \qquad & w(t) &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_w) \qquad & x(0) &\sim \mathcal{N}(\bar{x}, \Sigma_{x_0}) \\ y(t) &= C_t x(t) + d_t + v(t) & v(t) &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_v) \end{aligned}$$

avec $x(0)$, les $w(t)$ et les $v(t)$ mutuellement indépendants.
Initialisation : $\hat{x}(0|-1) = \bar{x}$ et $\Sigma_{0|-1} = \Sigma_{x_0}$.
Equations de mise à jour :

$$\begin{aligned} \hat{x}(t|t) &= \hat{x}(t|t-1) + \Sigma_{t|t-1} C_t^T [C_t \Sigma_{t|t-1} C_t^T + \Sigma_v]^{-1} [y(t) - (C_t \hat{x}(t|t-1) + d_t)] \ , \\ \Sigma_{t|t} &= \Sigma_{t|t-1} - \Sigma_{t|t-1} C_t^T [C_t \Sigma_{t|t-1} C_t^T + \Sigma_v]^{-1} C_t \Sigma_{t|t-1} \ , \\ \hat{x}(t+1|t) &= A_t \hat{x}(t|t) \ , \qquad \Sigma_{t+1|t} = A_t \Sigma_{t|t} A_t^T + B_t \Sigma_w B_t^T \ . \end{aligned}$$

Bon travail.

Solutions

Chaînes de Markov cachées

1. Soit $\pi^{(4)} \in \mathbb{R}^5$ le vecteur ligne dont l'élément i vaut $P(\mathcal{X}_4 = i)$.
   On a $\pi^{(4)} = \pi\Pi^3$.
2. Soit $\pi^{(4|1:3)} \in \mathbb{R}^5$ le vecteur ligne dont l'élément i vaut $P(\mathcal{X}_4 = i|\mathcal{Y}_1 = 3, \mathcal{Y}_2 = 5, \mathcal{Y}_3 = 2)$.
   Le calcul de $\pi^{(4|1:3)}$ se base sur une propagation α jusqu'en $t = 4$. En notant $\boldsymbol{e}_k \in \mathbb{R}^8$ le vecteur colonne peuplé de zéros sauf l'élément k qui vaut 1, en notant $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^5$ le vecteur colonne peuplé de uns, et $*$ le produit élément par élément, on calcule successivement
   $$\begin{aligned}
   \hat{\alpha}_1 &= \pi \\
   \alpha_1 &= \hat{\alpha}_1 * (\Sigma\mathbf{e}_3)^T \\
   \hat{\alpha}_2 &= \alpha_1\Pi \\
   \alpha_2 &= \hat{\alpha}_2 * (\Sigma\mathbf{e}_5)^T \\
   \hat{\alpha}_3 &= \alpha_2\Pi \\
   \alpha_3 &= \hat{\alpha}_3 * (\Sigma\mathbf{e}_2)^T \\
   \alpha_4 &= \alpha_3\Pi \\
   \pi^{(4|1:3)} &= \alpha_4/(\alpha_4\mathbf{1}) \ \ .
   \end{aligned}$$
3. Soit $\pi^{(4|Y)} \in \mathbb{R}^5$ le vecteur ligne dont l'élément i vaut
   $$P(\mathcal{X}_4 = i|\mathcal{Y}_1 = 3, \mathcal{Y}_2 = 5, \mathcal{Y}_3 = 2, \mathcal{Y}_6 = 7, \mathcal{Y}_7 = 4, \mathcal{Y}_8 = 3) \ \ .$$
   En remarquant que
   $$P(\mathcal{X}_4 = i, Y_1, Y_2, Y_3, Y_6, Y_7, Y_8) = P(\mathcal{X}_4 = i, Y_1, Y_2, Y_3) \cdot P(Y_6, Y_7, Y_8|\mathcal{X}_4 = i) \ \ ,$$
   on voit que calcul de $\pi^{(4|Y)}$ se base sur α_4 et une propagation β jusqu'en $t = 4$.
   On calcule successivement
   $$\begin{aligned}
   \hat{\beta}_8 &= (\Sigma\mathbf{e}_3)^T \\
   \beta_7 &= \hat{\beta}_8\Pi^T \\
   \hat{\beta}_7 &= \beta_7 * (\Sigma\mathbf{e}_4)^T \\
   \beta_6 &= \hat{\beta}_7\Pi^T \\
   \hat{\beta}_6 &= \beta_6 * (\Sigma\mathbf{e}_7)^T \\
   \beta_5 &= \hat{\beta}_6\Pi^T \\
   \beta_4 &= \beta_5\Pi^T \\
   \hat{p} &= \alpha_4 * \beta_4 \\
   \pi^{(4|Y)} &= \hat{p}/(\hat{p}\mathbf{1}) \ \ .
   \end{aligned}$$
4. On remarque que
   $$\begin{aligned}
   P(\mathcal{Y}_4 = j, \mathcal{Y}_1 = 3, \ldots \mathcal{Y}_8 = 3) &= \sum_{i=1}^{5} P(\mathcal{X}_4 = i, \mathcal{Y}_4 = j, \mathcal{Y}_1 = 3, \ldots, \mathcal{Y}_8 = 3) \\
   &= \sum_{i=1}^{5} P(\mathcal{X}_4 = i, \mathcal{Y}_1 = 3, \ldots, \mathcal{Y}_8 = 3) \cdot P(\mathcal{Y}_4 = j|\mathcal{X}_4 = i)
   \end{aligned}$$
   de sorte que le vecteur ligne $\pi^{(y_4|Y)} \in \mathbb{R}^8$ dont l'élément j vaut $P(\mathcal{Y}_4 = j|\mathcal{Y}_1 = 3, \ldots, \mathcal{Y}_8 = 3)$ est donné par $\pi^{(y_4|Y)} = \hat{q}/(\hat{q}\mathbf{1})$ avec $\hat{q} \triangleq \hat{p}\Sigma = (\alpha_4 * \beta_4)\Sigma \in \mathbb{R}^8$ et $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^8$.

Estimation statique

En posant $\boldsymbol{E} \triangleq \boldsymbol{CA} + \boldsymbol{FB}$ et $\boldsymbol{J} \triangleq \boldsymbol{FD}$, les équations de l'énoncé se mettent sous la forme

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{h} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{B} & 0 & \boldsymbol{D} & 0 \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{J} & \boldsymbol{G} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{H}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} .$$

Le vecteur $\boldsymbol{b}$ suit $\mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{\Sigma}_b)$, avec $\boldsymbol{\Sigma}_b = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\Sigma}_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Sigma}_w \end{bmatrix}$.

Le vecteur $\boldsymbol{a}$ suit $\mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{\Sigma}_a)$, avec

$$\boldsymbol{\Sigma}_a = \mathbb{E}\{(\boldsymbol{a} - \bar{\boldsymbol{a}})((\boldsymbol{a} - \bar{\boldsymbol{a}})^T\} = \boldsymbol{H}\mathbb{E}\{(\boldsymbol{b} - \bar{\boldsymbol{b}})((\boldsymbol{b} - \bar{\boldsymbol{b}})^T\}\boldsymbol{H}^T = \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Sigma}_a\boldsymbol{H}^T,$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_a &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{B} & 0 & \boldsymbol{D} & 0 \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{J} & \boldsymbol{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\Sigma}_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Sigma}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{E}^T \\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 & \boldsymbol{C}^T \\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}^T & \boldsymbol{J}^T \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{G}^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{B} & 0 & \boldsymbol{D} & 0 \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{J} & \boldsymbol{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{\Sigma}_x & \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{E}^T \\ \boldsymbol{\Sigma}_u & 0 & 0 & \boldsymbol{\Sigma}_u\boldsymbol{C}^T \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\Sigma}_v\boldsymbol{D}^T & \boldsymbol{\Sigma}_v\boldsymbol{J}^T \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Sigma}_w\boldsymbol{G}^T \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{c|ccc} \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{\Sigma}_u & \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_x & \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{E}^T + \boldsymbol{\Sigma}_u\boldsymbol{C}^T \\ \hline \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{\Sigma}_x & \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{E}^T \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}_x & \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{B}^T + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_v\boldsymbol{D}^T & \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{E}^T + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_v\boldsymbol{J}^T \\ \boldsymbol{E}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_u & \boldsymbol{E}\boldsymbol{\Sigma}_x & \boldsymbol{E}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{B}^T + \boldsymbol{J}\boldsymbol{\Sigma}_v\boldsymbol{D}^T & \boldsymbol{E}\boldsymbol{\Sigma}_x\boldsymbol{E}^T + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}_u\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{J}\boldsymbol{\Sigma}_v\boldsymbol{J}^T + \boldsymbol{G}\boldsymbol{\Sigma}_w\boldsymbol{G}^T \end{array}\right] \\
&\triangleq \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Sigma}_y & \boldsymbol{\Sigma}_{yc} \\ \hline \boldsymbol{\Sigma}_{yc}^T & \boldsymbol{\Sigma}_c \end{array}\right].
\end{aligned}$$

On évalue

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{y}} &= \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}, \\
\bar{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{x}}, \\
\bar{\boldsymbol{h}} &= \boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{F}\bar{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{x}}.
\end{aligned}$$

Par les formules de l'estimation statique, on a finalement

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{h}\} &= \bar{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\Sigma}_{yc}\boldsymbol{\Sigma}_c^{-1} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{h} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}} \\ \bar{\boldsymbol{z}} \\ \bar{\boldsymbol{h}} \end{bmatrix} \right), \\
\mathbb{E}\{||\boldsymbol{y} - \mathbb{E}\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{h}\}||^2\} &= \mathrm{tr}\{\boldsymbol{\Sigma}_y - \boldsymbol{\Sigma}_{yc}\boldsymbol{\Sigma}_c^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{yc}^T\}.
\end{aligned}$$

Filtre de Kalman

1. La dynamique est mise sous la forme $\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}w(t)$ avec

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z(t-1) \\ z(t-2) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2.4 & -2.17 & 0.712 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ .$$

2. De la linéarisation de $f(z)$ autour de z_0,

$$f(z) = \frac{1}{1+\exp\{-0.2\ z\}} \qquad \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{0.2\exp\{-0.2\ z\}}{(1+\exp\{-0.2\ z\})^2}$$
$$f(z) \simeq \frac{1}{1+\exp\{-0.2\ z_0\}} + \frac{0.2\exp\{-0.2\ z_0\}}{(1+\exp\{-0.2\ z_0\})^2}(z-z_0) \ ,$$

se déduit la linéarisation $y(t) \simeq \boldsymbol{C}_t\boldsymbol{x}(t) + d_t + v(t)$ autour de $z_0(t)$ avec

$$\boldsymbol{C}_t = \boldsymbol{C}(z_0(t)) = \begin{bmatrix} \dfrac{0.2\exp\{-0.2\ z_0(t)\}}{(1+\exp\{-0.2\ z_0(t)\})^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$d_t = d_t(z_0(t)) = \frac{1}{1+\exp\{-0.2\ z_0(t)\}} - \frac{0.2\ z_0(t)\exp\{-0.2\ z_0(t)\}}{(1+\exp\{-0.2\ z_0(t)\})^2} \ .$$

3. On initialise tout d'abord

$$\hat{\boldsymbol{x}}(0|-1) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3 \ , \qquad\qquad \boldsymbol{\Sigma}_{0|-1} = \boldsymbol{\Sigma}_0 \ .$$

Ensuite, pour i allant de 0 à t, on calcule successivement

$$\hat{z}(i|i-1) = \{\hat{\boldsymbol{x}}(i|i-1)\}_1 = [\ 1\ 0\ 0\ ]\hat{\boldsymbol{x}}(i|i-1)$$
$$\boldsymbol{C}_i = \begin{bmatrix} \dfrac{0.2\exp\{-0.2\ \hat{z}(i|i-1)\}}{(1+\exp\{-0.2\ \hat{z}(i|i-1)\})^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Big\{$ Facultatif si $\hat{y}(i|i-1)$ est calculé :

$$d_i = \frac{1}{1+\exp\{-0.2\ \hat{z}(i|i-1)\}} - \frac{0.2\ \hat{z}(i|i-1)\exp\{-0.2\ \hat{z}(i|i-1)\}}{(1+\exp\{-0.2\ \hat{z}(i|i-1)\})^2} \quad \Big\}$$
$$\hat{y}(i|i-1) = \boldsymbol{C}_i\hat{\boldsymbol{x}}(i|i-1) + d_i = f(\hat{z}(i|i-1)) = \frac{1}{1+\exp\{-0.2\ \hat{z}(i|i-1)\}}$$
$$\hat{\boldsymbol{x}}(i|i) = \hat{\boldsymbol{x}}(i|i-1) + \boldsymbol{\Sigma}_{i|i-1}\boldsymbol{C}_i^T[\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{\Sigma}_{i|i-1}\boldsymbol{C}_i^T + 0.025]^{-1}[y(i) - \hat{y}(i|i-1)]$$
$$\hat{z}(i|i) = \{\hat{\boldsymbol{x}}(i|i)\}_1 = [\ 1\ 0\ 0\ ]^T\hat{\boldsymbol{x}}(i|i)$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_{i|i} = \boldsymbol{\Sigma}_{i|i-1} - \boldsymbol{\Sigma}_{i|i-1}\boldsymbol{C}_i^T[\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{\Sigma}_{i|i-1}\boldsymbol{C}_i^T + 0.025]^{-1}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{\Sigma}_{i|i-1}$$
$$\hat{\boldsymbol{x}}(i+1|i) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(i|i)$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_{i+1|i} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_{i|i}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T$$

On estime $z(t)$ par $\hat{z}(t|t) = \{\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)\}_1 \simeq \mathbb{E}\{z(t)|y(0),\ldots,y(t)\}$.