Introduction aux processus stochastiques

Examen — 2008

Durée : 3h30. Pas de gsm ni de calculatrice.
Répondre aux 3 questions sur feuilles séparées.

1 Chaînes de Markov cachées

Soit une chaîne de Markov cachée invariante dans le temps (π, Π, Σ), comportant 5 états numérotés de 1 à 5, et 8 observations numérotées de 1 à 8.
On note $\mathcal{X}_t$ la séquence des états cachés et $\mathcal{Y}_t$ la séquence des observations, pour $t = 1, 2, \ldots$
Pour rappel,

$$\pi_i = P(\mathcal{X}_1 = i) \qquad \Pi_{ij} = P(\mathcal{X}_{t+1} = j|\mathcal{X}_t = i) \qquad \Sigma_{ij} = P(\mathcal{Y}_t = j|\mathcal{X}_t = i).$$

Les valeurs numériques pour π, Π, Σ sont supposées connues.
On observe la séquence (incomplète) suivante :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_t	3	5	2	?	?	7	4	3	?	?

Les observations manquantes sont indiquées par un point d'interrogation.

Présenter les réponses en reprenant à la suite des développements la séquence explicite des calculs à effectuer (sauf les calculs déjà décrits pour une autre sous-question).
Définir les opérateurs utilisés et indiquer la dimension des vecteurs introduits.

On demande de calculer de façon efficace, pour $i = 1, 2, \ldots, 5$

1. Les probabilités $P(\mathcal{X}_4 = i)$,
2. Les probabilités $P(\mathcal{X}_4 = i|\mathcal{Y}_1 = 3, \mathcal{Y}_2 = 5, \mathcal{Y}_3 = 2)$,
3. Les probabilités $P(\mathcal{X}_4 = i|\mathcal{Y}_1 = 3, \mathcal{Y}_2 = 5, \mathcal{Y}_3 = 2, \mathcal{Y}_6 = 7, \mathcal{Y}_7 = 4, \mathcal{Y}_8 = 3)$.

Calculer également pour $j = 1, \ldots, 8$

4. $P(\mathcal{Y}_4 = j|\mathcal{Y}_1 = 3, \mathcal{Y}_2 = 5, \mathcal{Y}_3 = 2, \mathcal{Y}_6 = 7, \mathcal{Y}_7 = 4, \mathcal{Y}_8 = 3)$.

Rappels :
- La propagation α se base sur le calcul de $P(\mathcal{X}_t = k, Y_1, \ldots, Y_t)$ en $t = 1, 2, \ldots$
- La propagation β se base sur le calcul de $P(Y_{t+1}, \ldots, Y_N|\mathcal{X}_t = k)$ en $t = N-1, N-2, \ldots$

2 Estimation statique

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire distribué selon $\mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_x)$.
Soient $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^q$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^r$ des vecteurs de bruits gaussiens :

$$\boldsymbol{u} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_u), \qquad \boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_v), \qquad \boldsymbol{w} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_w).$$

Soient $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^t$ tels que

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{w}.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ sont mutuellement indépendents.

Calculer $\mathbb{E}\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{h}\}$ et $\mathbb{E}\{||\boldsymbol{y} - \mathbb{E}\{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{h}\}||^2\}$.

3 Filtre de Kalman

Estimation d'une série autorégressive à l'aide de mesures saturées.

On considère un processus stochastique à temps discret $z(t)$ dont la dynamique est contrôlée par un processus de bruit $w(t)$:

$$\begin{aligned} z(t+1) &= 2.4\ z(t) - 2.17\ z(t-1) + 0.712\ z(t-2) + w(t), \\ w(t) &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2), \quad \sigma_w^2 = 1 \ . \end{aligned}$$

Le processus est initialisé par

$$\boldsymbol{x}(0) \triangleq \begin{bmatrix} z(0) \\ z(-1) \\ z(-2) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_0) \qquad \mathbf{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 82.2144 & 73.6595 & 50.8231 \\ 73.6595 & 82.2144 & 73.6595 \\ 50.8231 & 73.6595 & 82.2144 \end{bmatrix} .$$

A chaque instant $t = 0, 1, \dots$ on mesure $y(t) = f(z(t)) + v(t)$ avec

$$f(z) = \frac{1}{1 + \exp\{-0.2\ z\}} \in [0, 1] \ , \qquad v(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2), \quad \sigma_v^2 = 0.025 \ .$$

La condition initiale $\boldsymbol{x}(0)$, les $w(0), w(1), \dots$ et les $v(0), v(1), \dots$ sont mutuellement indépendants.

1. Mettre la dynamique sous la forme $\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{A}_t \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_t w(t)$,
   en précisant la définition de $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{A}_t$ et $\boldsymbol{B}_t$.
2. Linéariser $f(z)$ autour d'un point z_0 arbitraire, i.e. calculer
   $$f(z) \simeq f(z_0) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} \cdot (z - z_0) \ .$$
   En déduire l'expression des $\boldsymbol{C}_t$ et d_t qui permettent de linéariser l'équation de mesure autour d'un $z_0(t)$ arbitraire sous la forme $y(t) \simeq \boldsymbol{C}_t \boldsymbol{x}(t) + d_t + v(t)$.
3. On recueille $y(0), y(1), \dots$ au fur et à mesure. Décrire un algorithme permettant d'estimer au mieux $z(t)$ en tenant compte des mesures $y(0), \dots, y(t)$ dont les valeurs numériques sont supposées connues.
   Indication :
   Linéariser $y(t)$ autour de la *prédiction* pour $z(t)$, connaissant $y(1), \dots, y(t-1)$.

Rappel : Filtre de Kalman

Système considéré :

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A_t x(t) + B_t w(t) & w(t) &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_w) & x(0) &\sim \mathcal{N}(\bar{x}, \Sigma_{x_0}) \\ y(t) &= C_t x(t) + d_t + v(t) & v(t) &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_v) \end{aligned}$$

avec $x(0)$, les $w(t)$ et les $v(t)$ mutuellement indépendants.
Initialisation : $\hat{x}(0|-1) = \bar{x}$ et $\Sigma_{0|-1} = \Sigma_{x_0}$.
Equations de mise à jour :

$$\begin{aligned} \hat{x}(t|t) &= \hat{x}(t|t-1) + \Sigma_{t|t-1} C_t^T [C_t \Sigma_{t|t-1} C_t^T + \Sigma_v]^{-1} [y(t) - (C_t \hat{x}(t|t-1) + d_t)] \ , \\ \Sigma_{t|t} &= \Sigma_{t|t-1} - \Sigma_{t|t-1} C_t^T [C_t \Sigma_{t|t-1} C_t^T + \Sigma_v]^{-1} C_t \Sigma_{t|t-1} \ , \\ \hat{x}(t+1|t) &= A_t \hat{x}(t|t) \ , \qquad \Sigma_{t+1|t} = A_t \Sigma_{t|t} A_t^T + B_t \Sigma_w B_t^T \ . \end{aligned}$$

Bon travail.