Introduction aux processus stochastiques

Examen 2e session — 2007

Durée : 3h30.
Pas de gsm ni de calculatrice.

1 Chaînes de Markov

Suites et sous-suites de nombres.

Soit une chaîne de Markov invariante dans le temps définie sur 5 états.
La chaîne a une distribution initiale π et une matrice de transition Π.
Soit $\mathcal{X}_t$ la séquence des états de la chaîne, $t = 1, 2, \ldots$.
En notant les numéros correspondant aux 10 premiers états réalisés de la chaîne, on obtient une suite de 10 nombres $X_1, \ldots, X_{10}$, avec $1 \leq X_t \leq 5$. On demande :

1. La probabilité que le dernier nombre soit 2.
2. La probabilité de l'événement “Le 7e nombre est impair.”

Ensuite, on considère une seconde suite $Y_1, \ldots, Y_{10}$ de 10 nombres, obtenue en extrayant des 20 premiers états $X_1, \ldots, X_{20}$ de la chaîne ceux des instants pairs. Autrement dit,

$$Y_1 = X_2, Y_2 = X_4, \ldots, Y_{10} = X_{20}.$$

On demande, pour la suite des Y :

3. La probabilité de l'événement “Le 3e nombre est 4 et le 6e est strictement inférieur à 3.”

Enfin, on considère une troisième suite de 10 nombres $Z_1, \ldots, Z_{10}$ obtenue en notant uniquement les états 2, 3, 4, 5 de la suite des états de la chaîne $X_1, X_2, \ldots$
Ainsi on a $2 \leq Z_t \leq 5$, et la chaîne de Markov doit effectuer des transitions jusqu'à ce que la suite des Z compte 10 éléments.
Par exemple, au départ de 1 4 3 5 4 4 2 1 1 3 1 3 2 1 5 on tire la suite 4 3 5 4 4 2 3 3 2 5.
On demande :

4. De montrer que la suite des Z peut être obtenue en notant la séquence des états d'une chaîne de Markov invariante dans le temps (π', Π'). Pour ce faire, donner la distribution initiale π' et la matrice de transition Π' en fonction de π et Π.
   Travailler élément par élément si nécessaire (i.e. définir π'_i et Π'_{ij} pour $1 \leq i, j \leq 5$.)

2 Chaînes de Markov cachées

Inférence à partir d'observations d'état bruitées.

Soit une chaîne de Markov cachée invariante dans le temps (π, Π, Σ) à 3 états S_1, S_2, S_3 et 3 observations possibles E_1, E_2, E_3.
On note $\mathcal{X}_t$ la séquence des états cachés et $\mathcal{Y}_t$ la séquence des observations, pour t = $1, 2, \ldots, N$.
Pour rappel,

$$\pi_i = P(\mathcal{X}_1 = S_i) \qquad \Pi_{ij} = P(\mathcal{X}_{t+1} = S_j|\mathcal{X}_t = S_i) \qquad \Sigma_{ij} = P(\mathcal{Y}_t = E_j|\mathcal{X}_t = S_i).$$

On considère le cas particulier

$$\pi = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}\right]/3 \qquad \Pi = \left[\begin{array}{ccc} .7 & .3 & 0 \\ 0 & .9 & .1 \\ .4 & 0 & .6 \end{array}\right] \qquad \Sigma = \left[\begin{array}{ccc} .8 & .1 & .1 \\ .1 & .8 & .1 \\ .1 & .1 & .8 \end{array}\right].$$

On dispose d'une séquence $Y_1\ Y_2 \ldots Y_N$ d'observations, où chaque $Y_i \in \{E_1, E_2, E_3\}$.
On considère le cas particulier où $N = 3$ et la séquence observée est

$$E_3\ E_2\ E_1.$$

Autrement dit, on a $Y_1 = E_3$, $Y_2 = E_2$ et $Y_3 = E_1$.

Dans les questions qui viennent, la résolution numérique n'est pas demandée.

1. Dessiner le diagramme de transition d'états de la chaîne de Markov (π, Π).
2. Dessiner le réseau bayesien de la chaîne de Markov cachée (π, Π, Σ) pour les 3 premiers instants.
3. *Propagation α/Estimation d'état.*
   Calculer de façon efficace les probabilités $P(\mathcal{X}_N = S_i|\mathcal{Y}_1 = Y_1, \ldots, \mathcal{Y}_N = Y_N)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $N = 3$.
   En notation abrégée, la question revient à demander $P(\mathcal{X}_N|Y_1 \ldots Y_N)$ pour $N = 3$.
   Suggestion : se ramener au calcul de $P(\mathcal{X}_t = S_i, \mathcal{Y}_1 = Y_1, \ldots, \mathcal{Y}_t = Y_t)$, c'est-à-dire en notation abrégée $P(\mathcal{X}_t, Y_1 \ldots Y_t)$, pour t valant successivement 1,2,3.
4. *Propagation β/Filtrage.*
   Calculer de façon efficace $P(\mathcal{X}_t|Y_1 \ldots Y_N)$ pour $t = 1$ et $t = 2$.
   Suggestion : se ramener au calcul de $P(\mathcal{Y}_{t+1} = Y_{t+1}, \ldots, \mathcal{Y}_N = Y_N|\mathcal{X}_t = S_i)$, c'est-à-dire $P(Y_{t+1} \ldots Y_N|\mathcal{X}_t)$, et exploiter le calcul de $P(\mathcal{X}_t, Y_1 \ldots Y_t)$ du point précédent.
5. *Prédiction.*
   Calculer $P(\mathcal{X}_t|Y_1 \ldots Y_N)$ pour $N = 3$ et $t \in \{4, 5\}$.
6. Supposer à présent qu'on n'observe que $Y_1 = E_3$ et $Y_3 = E_1$.
   Calculer $P(\mathcal{X}_2|Y_1, Y_3)$.
   Suggestion : Modifier les algorithmes de propagation établis aux points précédents.

3 Estimation statique

Cascade de senseurs.

Soit x un vecteur source de dimension n, distribué selon $\mathcal{N}(\bar{x}, \Sigma_x)$.
Soit $y = Cx + v$ un premier vecteur de senseurs de dimension m_y,
Soit $z = Fx + Gy + w$ un second vecteur de senseurs de dimension m_z.
Le vecteur de bruit v suit une normale $\mathcal{N}(0, V)$, le vecteur de bruit w suit une normale $\mathcal{N}(0, W)$.
Les vecteurs x,v,w sont mutuellement indépendents.
On demande de déterminer :

1. L'estimateur $\hat{x}_{(1)} = \mathbf{E}\{x|y\}$
   et l'espérance de l'erreur quadratique d'estimation $\mathbf{E}\{||(x - \hat{x}_{(1)})||^2\}$.
2. L'estimateur $\hat{x}_{(2)} = \mathbf{E}\{x|y, z\}$
   et l'espérance de l'erreur quadratique d'estimation $\mathbf{E}\{||(x - \hat{x}_{(2)})||^2\}$.
3. L'estimateur $\hat{z} = \mathbf{E}\{z|y\}$
   et l'espérance de l'erreur quadratique d'estimation $\mathbf{E}\{||(z - \hat{z})||^2\}$.