Nom :

Introduction à l'Analyse Numérique

9 janvier 2012

1. (a) Soit n paires de points $(x_1, u(x_1)), \ldots, (x_n, u(x_n)) \in \mathbb{R}^2$. Soit $p_0, \ldots, p_{n-1}$ une famille de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i)$. On considère le polynôme de régression $q_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i p_i(x)$ où $a_i = \frac{\langle u, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle}$. Montrer que la variance définie comme $\sigma_k^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (u(x_i) - q_k(x_i))^2$ peut se calculer par la formule

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{n} \left(\langle u, u \rangle - \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle u, p_i \rangle^2}{\langle p_i, p_i \rangle} \right).$$

   (b) Soit une suite $(q_h, q_{\frac{h}{5}}, q_{\frac{h}{25}}, q_{\frac{h}{125}})$ qui converge linéairement vers $\bar{q}$, c'est-à-dire telle que

$$q_h = \bar{q} + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3.$$

   Donner une suite qui converge quadratiquement vers $\bar{q}$ et démontrer que c'est effectivement le cas.

Nom :

Introduction à l'Analyse Numérique

9 janvier 2012

2. Dans un réacteur nucléaire au thorium, un sel fondu circule dans le système. On amène en continu une quantité de thorium qui va se transformer au fur et à mesure en uranium par bombardement de neutrons. Cet uranium va subir la fission et être entièrement consommé. On mesure à différents instants la concentration en uranium dans le sel fondu. Ces concentrations sont renseignées dans le tableau ci-dessous.

Temps	0h	4h	8h	12h	16h	20h	24h
Concentration $[g/l]$	5	6	8	9	7	6	5

On souhaite connaître la quantité totale d'uranium entré en fission sur la journée.

(a) Donner une approximation numérique de cette quantité.

(b) La mesure de la concentration en uranium est très chère à effectuer et on souhaite diminuer le nombre de mesures à trois sur la journée. A quelles heures faut-il effectuer les trois mesures pour obtenir néanmoins la meilleure approximation de la quantité totale d'uranium utilisé ?

Nom :

Introduction à l'Analyse Numérique

9 janvier 2012

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -249 & -11 & 21 \end{pmatrix}$ dont l'inverse est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -228 & 207 & -2 \\ -113.5 & 102.5 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer le nombre de conditionnement de A en norme ∞.

   (b) On souhaite résoudre le système $Ax = b$ par élimination de Gauss, où $b = (1.02\ 4.75\ 53.2)$ est connu avec trois chiffres significatifs. Quelle est la précision sur le résultat ?

   (c) On équilibre les équations. Quelle sera la nouvelle précision sur le résultat ?

Nom :

Introduction à l'Analyse Numérique
9 janvier 2012

4. On considère le problème d'optimisation linéaire

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1+x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_2 \le 3 \\ & x_1+x_2 \ge 2 \\ & 3x_1-x_2 \le 3 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

(a) Ecrire la forme standard de ce problème.

(b) Dans le tableau suivant, correspondant à une solution de base réalisable (écrite pour une maximisation), il manque trois coefficients.

$$\begin{array}{lrl} \max & \frac{5}{4}s_2 & \square \\ \text{s.t.}\ x_1 & -\frac{1}{4}s_2+\frac{1}{4}s_3 & = \square \\ x_2 & -\frac{3}{4}s_2 & \square = \frac{3}{4} \\ & s_1+\frac{3}{4}s_2+\frac{1}{4}s_3 & = \frac{9}{4} \end{array}$$

Trouver les trois coefficients manquants dans les trois boites.

(c) Effectuer un pivot afin de trouver la solution optimale au problème d'optimisation.

Nom :

4.

Formulaire

Taylor $f(x+h) = \sum_{k=o}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$

Lagrange $P(t) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i)l_i(t)$ et $l_i(t) = \frac{\prod_{j\neq i}(t-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}$

Erreur d'interpolation $e(x) = \frac{u^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

Régression (non)-linéaire $\phi(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j\phi_j(x)$

$$\begin{pmatrix} \langle\phi_0,\phi_0\rangle & \langle\phi_0,\phi_1\rangle & \cdots & \langle\phi_0,\phi_k\rangle \\ \langle\phi_1,\phi_0\rangle & \langle\phi_1,\phi_1\rangle & \cdots & \langle\phi_1,\phi_k\rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle\phi_k,\phi_0\rangle & \langle\phi_k,\phi_1\rangle & \cdots & \langle\phi_k,\phi_k\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u,\phi_0\rangle \\ \langle u,\phi_1\rangle \\ \vdots \\ \langle u,\phi_k\rangle \end{pmatrix}$$

et $\langle f,g\rangle = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i)$

Variances $\sigma_k^2 = \frac{1}{n}(\langle u,u\rangle - \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle u,p_i\rangle^2}{\langle p_i,p_i\rangle})$.

Différences centrées

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}, \quad \frac{f(x-2h)-8f(x-h)+8f(x+h)-f(x+2h)}{12h}$$

Différences centrées pour les dérivées secondes

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

Extrapolation de Richardson

$$G_{i,j} = \frac{G_{i,j-1} - q^j G_{i-1,j-1}}{1-q^j}$$

avec les pas $h, hq, hq^2, hq^3, \ldots$

Formules de Newton-Cotes

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b)) && \text{(Trapèze)} \\ &\approx \frac{b-a}{2}(\frac{1}{3}f(a)+\frac{4}{3}f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{3}f(b)) && \text{(Simpson)} \\ &\approx \frac{(b-a)}{2}(\frac{1}{4}f(a)+\frac{3}{4}f(\frac{2a+b}{3})+\frac{3}{4}f(\frac{a+2b}{3})+\frac{1}{4}f(b)) && \text{(Simpson 3/8)} \\ \approx \frac{(b-a)}{2}(\frac{7}{45}f(a)+\frac{32}{45}f(\frac{3a+b}{4})+\frac{12}{45}f(\frac{a+b}{2})+\frac{32}{45}f(\frac{a+3b}{4})+\frac{7}{45}f(b)) && \text{(Boole)} \end{aligned}$$

Erreur d'intégration $I - T_h = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi)$

Quadratures de Gauss-Legendre

$n=1$, racines : $-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}$, poids : 1,1 $\qquad$ $n=2$, racines : $-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}$, poids : $\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$.

Normes matricielles

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|A\|_2 = (\text{valeur propre maximum de } A^TA)^{1/2}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

Nombre de conditionnement $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$.

Méthodes itératives $x^{(k)} = Q^{-1}[(Q-A)x^{(k-1)} + b]$

Coût réduit $\bar{c}_j := c_j - c_B^T A_B^{-1} A_j$

Simplexe : Variable qui sort de la base : $\arg\ \min_{i\in B|\bar{a}_{ij}>0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}$.

Newton-Raphson pour un système

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k - \left(\frac{\partial F(\underline{x}_k)}{\partial \underline{x}}\right)^{-1} F(\underline{x}_k),$$

Quasi-Newton : mise à jour de la matrice

$$A_k = A_{k-1} + \frac{(\underline{y}_{k-1} - A_{k-1}\underline{d}_{k-1})\underline{d}_{k-1}^T}{\underline{d}_{k-1}^T \underline{d}_{k-1}}.$$