Name :

Introduction to Numerical Analysis

August 31, 2015

1. (a) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée. Montrer que pour chaque valeur propre λ de A, il existe une ligne de la matrice $i \in \{1, \ldots, n\}$ telle que $|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

   (b) Expliquer deux méthodes pour approximer les cinq valeurs propres de plus grand module d'une matrice.

Name :

Introduction to Numerical Analysis

August 31, 2015

2. On souhaite approximer la dérivée d'une fonction $f(x)$ en $x = 0$ en utilisant les valeurs mesurées suivantes.

x	-2	-1	2	4
$f(x)$	1	2	1	0

   (a) Déterminer une formule qui permet d'approximer la dérivée de $f(x)$ en utilisant $f(x + 2h)$ et $f(x - h)$.

   (b) Déterminer l'ordre de convergence de la formule

   (c) Appliquer l'extrapolation de Richardson pour trouver une approximation de $f'(0)$.

Name :

Introduction to Numerical Analysis

August 31, 2015

3. Soit le problème d'optimisation linéaire

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + 3x_2 \geq 1 \\ & 6x_1 - 2x_2 \geq 3 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0. \end{array}$$

(a) Ecrire le problème en forme standard

(b) Représenter le problème graphiquement

(c) Calculer la décomposition LU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Utiliser la décomposition LU de A pour calculer une solution de base du problème linéaire.

(e) Utiliser l'algorithme du simplexe pour trouver une solution optimale du problème.

Name :

Introduction to Numerical Analysis

August 31, 2015

4. On souhaite résoudre le système non-linéaire

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$\cos(x + y) = x$$

où x et y sont exprimés en radians.
Appliquer deux itérations de la méthode de Newton pour les sytèmes en partant du point $(x, y) = (1, -1)$.

Formulary

Taylor $f(x+h) = \sum_{k=o}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$ **Lagrange** $P(t) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) l_i(t)$ and $l_i(t) = \frac{\prod_{j \neq i}(t - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$

Interpolation error $e(x) = \frac{u^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

Regression $\phi(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j \phi_j(x)$

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_0, \phi_k \rangle \\ \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_k \rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_k, \phi_0 \rangle & \langle \phi_k, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_k, \phi_k \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u, \phi_0 \rangle \\ \langle u, \phi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, \phi_k \rangle \end{pmatrix}$$

and $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) g(x_i)$ **Variances** $\sigma_k^2 = \frac{1}{n}(\langle u, u \rangle - \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle u, p_i \rangle^2}{\langle p_i, p_i \rangle})$.

Centered differences $\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$, $\frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}$

Centered difference for second derivative $\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$

Richardson $G_{i,j} = \frac{G_{i,j-1} - q^j G_{i-1,j-1}}{1 - q^j}$ with steps $h, hq, hq^2, hq^3, \ldots$

Newton-Cotes

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b)) && \text{(Trapèze)} \\ &\approx \frac{b-a}{2}(\tfrac{1}{3} f(a) + \tfrac{4}{3} f(\tfrac{a+b}{2}) + \tfrac{1}{3} f(b)) && \text{(Simpson)} \\ &\approx \frac{(b-a)}{2}(\tfrac{1}{4} f(a) + \tfrac{3}{4} f(\tfrac{2a+b}{3}) + \tfrac{3}{4} f(\tfrac{a+2b}{3}) + \tfrac{1}{4} f(b)) && \text{(Simpson 3/8)} \end{aligned}$$

Integration error $I - T_h = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi)$

Gauss-Legendre

$n = 1$, roots : $-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}$, weights : 1,1 $\quad$ $n = 2$, roots : $-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}$, weights : $\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$.

Matrix norms

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|A\|_2 = (\text{max eigenvalue of } A^T A)^{1/2}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Condition number $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Iterative methods $x^{(k)} = Q^{-1}[(Q - A)x^{(k-1)} + b]$

Reduced costs $\bar{c}_j := c_j - c_B^T A_B^{-1} A_j$

Simplex : Variable leaving the basis : $\arg\min_{i \in B | \bar{a}_{ij} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}$.

Newton for a system $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k - \left(\frac{\partial F(\underline{x}_k)}{\partial \underline{x}} \right)^{-1} F(\underline{x}_k)$

Update in Quasi-Newton : $A_k = A_{k-1} + \frac{(\underline{y}_{k-1} - A_{k-1} \underline{d}_{k-1}) \underline{d}_{k-1}^T}{\underline{d}_{k-1}^T \underline{d}_{k-1}}$.

Orthogonal polynomial basis for the inner product $\langle f, g \rangle = \sum_{i=6}^{9} f(i) g(i)$

Explicit formulas

$$\begin{aligned} q_0(x) &= 1 \\ q_1(x) &= x - 7.5 \\ q_2(x) &= x^2 - 15\ x + 55 \\ q_3(x) &= x^3 - 22.5\ x^2 + 166.7\ x - 406.5 \end{aligned}$$

Values of the polynomials

x	6	7	8	9
$q_0(x)$	1	1	1	1
$q_1(x)$	-1.5	-0.5	0.5	1.5
$q_2(x)$	1	-1	-1	1
$q_3(x)$	-0.3	0.9	-0.9	0.3