Systèmes non linéaires - Année académique 2014-2015
Devoir 2: étude d'un système en temps discret

A rendre au plus tard le 15/12/14. La résolution du devoir ne doit comprendre que les figures, les développements mathématiques et de courtes explications si nécessaire.

On considère l'application

$$x_{n+1} = F(x_n) = r\sqrt{1 - |2x_n - 1|} \bmod 1$$

où $r > 0$ est un paramètre. Pour certains développements, il peut être utile de simplifier l'expression de F en considérant séparément les cas $x \leq 1/2$ et $x > 1/2$.

1. Dans le cas $r < 1$, identifier les points fixes et étudier leur stabilité (en fonction de la valeur de r).
2. Lorsque $r = 0.9$, montrer graphiquement qu'il existe (entre autres) une orbite périodique de période 2 et une orbite périodique de période 4.
3. En utilisant une propriété de la dérivée de F, montrer qu'il n'existe pas d'orbite périodique stable lorsque $r \geq 1$.
4. Dessiner le diagramme de bifurcation pour les valeurs $r \in [0, 2]$ incrémentées avec un pas de 0.01. Note : Pour chaque valeur du paramètre, le calcul d'une seule trajectoire de 100 points donne un résultat satisfaisant.
5. Calculer numériquement (mais aussi précisément que possible) l'exposant de Lyapunov du système lorsque $r = 1$. Est-il possible de prédire le signe de l'exposant d'après un raisonnement similaire à celui du point 3 ?
6. Quelle propriété exacte du système le résultat du point 5 capture-t-il ? Illustrer cette propriété à l'aide de deux trajectoires.
7. Pour $r = 1$, donner l'expression de l'opérateur de Perron-Frobenius P (avec la mesure de Lebesgue) associé au système. Pour rappel,

   $$P\rho(x) = \frac{d}{dx} \int_{F^{-1}([0,x])} \rho(s) ds \, .$$

   Calculer deux itérations de l'opérateur pour une densité initiale uniforme $\rho_0(x) = 1$ (de manière numérique ou analytique, au choix). Quelle est la densité stationnaire de l'opérateur ?
8. BONUS - FACULTATIF : En utilisant le résultat du point 7 et le théorème ergodique de Birkhoff, calculer analytiquement l'exposant de Lyapunov du système lorsque $r = 1$.