Systèmes non linéaires - Année académique 2014-2015
Devoir 1: oscillateur de Duffing

A rendre au plus tard le 03/11/14. La résolution du devoir ne doit comprendre que les figures, les quelques formules utilisées et de courtes explications si nécessaire.

1 Cas conservatif

Soit l'oscillateur de Duffing défini par l'équation

$$\ddot{x} = x - x^3 = -\frac{dV}{dx}$$

avec

$$V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\,.$$

1. Tracer les isoclines et identifier les points fixes.
2. Représenter le champ de vecteurs (avec les fonctions *meshgrid* et *quiver*) et tracer une trajectoire.
3. Tracer les courbes de niveau de l'énergie (avec la fonction *contour*). Comment sont les trajectoires et le champ de vecteurs par rapport à ces courbes de niveau ?

2 Cas dissipatif

On considère maintenant le même modèle mais avec de l'amortissement :

$$\ddot{x} = x - x^3 - 0.1\,\dot{x}\,.$$

1. Etudier la stabilité (locale) des points fixes et confirmer l'analyse avec quelques simulations numériques.
2. En utilisant un argument basé sur l'énergie, que peut-on dire de la stabilité globale des points fixes (meilleure estimation du bassin d'attraction de chaque point fixe stable) ?
3. Tracer les variétés stable et instable du point de selle et en déduire le bassin d'attraction de chaque point fixe stable. Les variétés stable et instable peuvent être obtenues en calculant des trajectoires dont la condition initiale est proche du point de selle, pour le système considéré et pour son homologue en temps inversé.
4. Au point de selle, attacher un repère orienté dans les directions propres du système linéarisé et expliquer pourquoi le résultat est en accord avec le théorème de la variété stable.