MAI 97

EXAMEN ECRIT - Cours de "Calcul des Probabilités" - Solutions.

Exercice 1 -

A. La consommation d'une voiture équipée d'un moteur de type "classic" suit une loi normale de moyenne 8,5 litres et d'écart-type 0,75 litres. On dote cette voiture d'un moteur de type "new". En testant 100 voitures, on trouve une consommation moyenne de 8,35 litres. (On suppose que l'écart-type de la consommation reste constant).

a) Peut-on conclure qu'il y a une différence significative entre les moteurs au niveau de signification $\alpha=0,04$?

b) Peut-on conclure que le nouveau moteur permet de diminuer la consommation moyenne au même niveau de signification?

c) Sous la règle de décision adoptée en b), quel est le risque de croire que le nouveau moteur ne permet pas de réduire la consommation moyenne alors que celle-ci est de 8,3 litres.

B. Le tableau suivant reprend les résultats d'une enquête entreprise pour déterminer si l'âge du conducteur a une influence sur le nombre d'accidents de la route.

Nombre d'accidents \ Age du conducteur	18-30	31-40	41-50	51-60	>60
0	748	821	786	720	672
1	74	60	51	66	50
2	31	25	22	16	15
>2	9	10	6	5	7

Tester si l'âge influence le nombre d'accidents au seuil de signification $\alpha=0,05$.

Solution

A.

a) Soit X la consommation d'une voiture équipée du moteur "new".

Il s'agit d'effectuer le test relatif aux hypothèses

$$(H_0) \quad \mu = 8,5$$
$$(H_1) \quad \mu \neq 8,5$$

au seuil de signification a=0,04.

Sous (H_0), $\overline{X} \in N(8{,}5;2{,}054)$ d'où $\dfrac{\overline{X}-8{,}5}{0{,}075} = Z$.

Comme $\quad P(-2{,}054 \le Z \le 2{,}054) = 0{,}96$,

on a $\quad P(8{,}34595 \le \overline{X} \le 8{,}65405) = 0{,}96$.

Comme $\overline{X}_{obs} \in [8{,}34595; 8{,}65405]$, on accepte (H_0) : on considère donc qu'il n'y a pas différence significative entre les moteurs.

b) Cette fois, les hypothèses sont de la forme

$$(H_0) \quad \mu = 8{,}5$$
$$(H_1) \quad \mu < 8{,}5$$

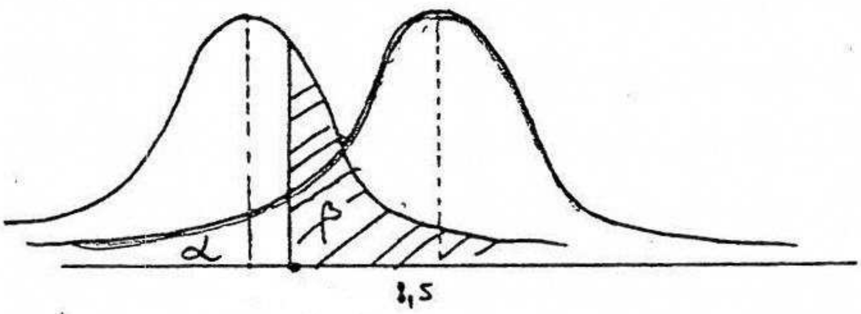
Sous (H_0), on a encore $\dfrac{\overline{X}-8{,}5}{0{,}075} = Z$.

Comme $\quad P(Z \ge -1{,}751) = 0{,}96$,

on obtient $\quad P(\overline{X} \ge 8{,}368675) = 0{,}96$.

Comme $\quad \overline{X}_{obs} < 8{,}368675$, on rejette (H_0) : on admet par conséquent que le moteur "new" permet de réduire la consommation.

c)



Le risque est de $\beta = P(\overline{X} \ge 8{,}368675 | \mu = 8{,}3) = P(Z \ge 0{,}915666) = 0{,}1799$.

B. Considérons les hypothèses

(H_0) l'âge n'influence pas le nombre d'accidents,

(H_1) l'âge influence le nombre d'accidents.

Sous (H_0), calculons les effectifs théoriques t_{ij} :

$t_{11} = \dfrac{3747 \cdot 862}{4194} = 770$

770	818	773	721	665
62	66	62	58	53
22	24	22	21	19
8	8	8	7	7

L'expression $\chi^2 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} \dfrac{(t_{ij}-o_{ij})^2}{t_{ij}}$ (o_{ij} = effectif observé)

est une variable aléatoire chi-carré à $\gamma = (4-1)(5-1) = 12$ degrés de liberté.

Comme $\chi^2_{obs} = 14{,}478676 < \chi^2_{0,95} = 21$, on accepte (H_0) et par là le fait que l'âge du conducteur n'influence pas le nombre d'accidents.

Exercice 2 -

Les pannes subies par un appareil électronique sont dues à une défaillance de transistor ou de condensateur.

Le nombre X de pannes dues à une défaillance de transistor suit une loi de Poisson de paramètre $a \quad (a > 0)$ tandis que le nombre Y de pannes dues à une défaillance de condensateur suit une loi de Poisson de paramètre $b \quad (b > 0)$.

On suppose que les pannes sont indépendantes.

a) Calculer la probabilité qu'il y ait autant de pannes imputables aux transistors qu'aux condensateurs.

b) Déterminer la fonction de probabilité du nombre total de pannes. Que peut-on en conclure? Quel est le nombre moyen de pannes subies par l'appareil?

Sachant qu'il y a N pannes au total, désignons par X_N le nombre de pannes dues à une défaillance de transistor.

c) Déterminer la fonction de probabilité de X_N. En déduire la nature de X_N.

d) Chaque panne de transistor coûte A francs et chaque panne de condensateur, B francs. Calculer le coût moyen des N pannes.

e) Si $X_N = n \quad (n \leq N)$, calculer la probabilité pour que les n pannes dues à une défaillance de transistor soient consécutives.

(N.B. On suppose que les pannes ne sont jamais simultanées).

Solution

a) La probabilité demandée vaut

$$
\begin{aligned}
P(X = Y) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}(X = k \text{ et } Y = k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k \text{ et } Y = k) \quad , \\
&= \sum P(X = k) \quad P(Y = k)
\end{aligned}
$$

puisque X,Y sont indépendants. En tenant compte des lois de X,Y, il vient

$$
\begin{aligned}
P(X = Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-a}a^k}{k!} \frac{e^{-b}b^k}{k!} \\
&= e^{-(a+b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ab)^k}{(k!)^2}
\end{aligned}
$$

b) En fonction d'une propriété d'additivité des variables aléatoires indépendantes de Poisson, $X + Y$ est aussi de Poisson avec paramètre $a + b$ (voir cours p 84).

— OU —

Désignons par $Z = X + Y$ le nombre total de pannes. Il s'agit d'une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $k = 0,1,\cdots$ avec la probabilité

$$
\begin{aligned}
P(Z=k) &= P(X+Y=k) \\
&= P\left(\bigcup_{j=0}^{k}(X=j \text{ et } Y=k-j)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k} P(X=j \text{ et } Y=k-j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} P(X=j)P(Y=k-j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \frac{e^{-a}a^{j}}{j!}\frac{e^{-b}b^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= e^{-(a-b)}\sum_{j=0}^{k}\frac{a^{j}b^{k-j}}{j!(k-j)!}
\end{aligned}
$$

expression obtenue en raisonnant comme dans a). En notant que

$$\frac{1}{j!(k-j)!} = \frac{C_k^j}{k!},$$

il vient

$$
\begin{aligned}
P(Z=k) &= \frac{e^{-(a+b)}}{k!}\sum_{j=0}^{k} C_k^j a^j b^{k-j} \\
&= \frac{e^{-(a+b)}}{k!}(a+b)^k
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que Z suit une loi de Poisson de paramètre $a+b$. Le nombre moyen de pannes subies par l'appareil vaut donc $E(Z)$, c'est-à-dire $a+b$.

c) On regarde une panne. C'est soit un transistor ou un condensateur avec probabilité respective $\dfrac{a}{a+b}$ et $\dfrac{b}{a+b}$.

On regarde N pannes. X_N est le nombre de pannes transistor, donc X_N est une variable aléatoire binomiale.

— OU —

X_N est une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $k=0,1,\cdots,N$ avec la probabilité

$$
\begin{aligned}
P(X_N = k) = P(X = k \mid Z = N) &= \frac{P(X = k \text{ et } Z = N)}{P(Z = N)} \\
&= \frac{P(X = k \text{ et } Y = N - k)}{P(Z = N)} \\
&= \frac{P(X = k)P(Y = N - k)}{P(Z = N)} \\
&= \frac{\dfrac{e^{-a}a^k}{k!}\dfrac{e^{-k}b^{N-k}}{(N-k)!}}{\dfrac{e^{-(a+b)}(a+b)^N}{N!}} \\
&= \frac{N!}{k!(N-k)!}\frac{a^k b^{N-k}}{(a+b)^N} \\
&= \mathrm{C}_N^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{N-k}
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que X_N est une binomiale de paramètres $n = N$ et $p = \dfrac{a}{a+b}$. (Notons que p représente la proportion des pannes dues à une défaillance de transistor).

d) Si C désigne le coût des N pannes, on a

$$C = X_N A + (N - X_N)B = X_N(A - B) + NB,$$

d'où le coût moyen des N pannes vaut

$$E(C) = (A - B)E(X_N) + NB = (A - B)N\frac{a}{a+b} + NB$$

ou encore

$$E(C) = N\left[(A - B)\frac{a}{a+b} + B\right] = \frac{N}{a+b}(Aa + Bb).$$

e) Chaque suite de N pannes peut être représentée par le groupement

$$tcttcc\ldots\ldots\ldots ct,$$

qui est un groupement ordonné de N éléments parmi lesquels figurent n symboles t (initiale de transistor) et $N - n$ symbole c (initiale de condensateur). Le nombre de cas possibles vaut donc

$$P_N^{(n,N-n)} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \mathrm{C}_N^n.$$

Les n pannes dues à une défaillance de transistor sont consécutives si le groupement correspondant contient une suite de n symboles t consécutifs. Le nombre de ces groupements est de $N - n + 1$ puisque le premier symbole t ne peut occuper que les positions $1, \ldots, N - n + 1$.

La probabilité demandée vaut donc

$$\frac{N - n + 1}{\mathrm{C}_N^n}.$$

Exercice 3 -

Un avion peut transporter 100 passagers et leurs bagages. Il pèse 120T avec l'équipage et le plein de carburants.
Il est interdit de décoller si le poids dépasse 129,42T.
Les 100 places ont été réservées. Le poids d'un voyageur suit une loi d'espérance mathématique de 70Kg et d'écart-type de 10Kg. Le poids de ses bagages, une loi d'espérance mathématique de 20Kg et d'écart-type de 10Kg.
Toutes ces variables aléatoires sont indépendantes.

1°) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type du poids total de l'appareil au décollage.

2°) Quelle est la probabilité maximum que l'avion ne puisse décoller?

3°) Si le poids d'un passager est $N(70;10)$ et celui de ses bagages $N(20;10)$, quelle est la probabilité que l'avion ne puisse pas décoller? Pourquoi cette différence?

N.B. : l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff peut être suggérée pour cet exercice.

<u>Solution</u>

X_i = poids du passager numéro i
Y_i = poids des bagages du passager numéro i

1°) $E(P) = E(\text{poids de l'avion au décollage}) = 120000 + \sum_i E(X_i) + \sum_i E(Y_i)$

$$E(P) = 120000 + 100.70 + 100.20 = 129000\text{Kg} = 129\text{T}$$

$$Var(P) = 0 + \sum_i \text{var}(X_i) + \sum_i \text{var}(Y_i) = 100.100 + 100.100 = 20000$$

$$\sigma(P) = 141\text{Kg}=0{,}141\text{T}$$

2°) Bienaymé-Tchebycheff. Pour toute loi de P

$$\Pr\left[\underbrace{E(P) - t\,\sigma(P)}_{128{,}58} \leq P \leq \underbrace{E(P) + t\,\sigma(P)}_{129{,}42}\right] \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow t = (129{,}42 - 129) : \sqrt{20} \cong 3$$

$$\Pr[P \leq 129{,}42] \geq \Pr[128{,}58 \leq P \leq 129{,}42] \geq 1 - \frac{1}{3^2} = 0{,}89$$

Donc $\Pr[P > 129{,}42] < 0{,}11$

3°) Loi de $P = N(129;0{,}141)$ Combinaison linéaire de variables aléatoires N indépendantes

$$\Pr_N[P > 129{,}42] = \Pr_G[Z > 2{,}978] \cong 0{,}002$$

La différence est due au fait que B.Tchebycheff est valable quelle que soit la loi.