

Exercice 1.

Enoncé.

Lors d'un jeu, un joueur a la probabilité p de gagner un point et la probabilité q de perdre un point à chaque essai ($p + q = 1$). Si le jeu comporte n essais indépendants,

- déterminer la loi de distribution du nombre G de points gagnés, ainsi que son espérance mathématique et son écart type.
- déterminer la distribution du score X du joueur après avoir exprimé X en fonction de G
- calculer $E(X)$ et $\text{var}(X)$.
- si $n = 100$ et $p = 0,6$, calculer $P(X \geq 0)$

Résolution.

- Le nombre G de points gagnés suit une loi binomiale de paramètres n, p . Il s'ensuit que $E(G) = np$ et $\text{var}(G) = npq$.
- Le score X du joueur est égal à la différence entre le nombre de points gagnés et le nombre de points perdus,

$$X = G - (n - G) = 2G - n.$$

La variable X prend les valeurs entières $x \in [-n, n]$ avec la probabilité

$$P(X = x) = P\left(G = \frac{n+x}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ et } n \text{ n'ont pas la même parité.} \\ C_n^{\frac{n+x}{2}} p^{\frac{n+x}{2}} q^{\frac{n-x}{2}} & \text{si } x \text{ et } n \text{ ont la même parité.} \end{cases}$$

- Il résulte des propriétés de l'espérance mathématique et de la variance que

$$E(X) = E(2G - n) = 2E(G) - n = 2np - n = (2p - 1)n$$

$$\text{var}(X) = \text{var}(2G - n) = 4 \text{var}(G) = 4npq$$

- Comme $npq = 24 (> 10)$, on peut considérer que

$$G \in \mathbf{N}(np, \sqrt{npq}), \text{ soit } G \in \mathbf{N}(60; 4,90)$$

Dès lors,

$$P(X \geq 0) = P(2G - 100 \geq 0) = P_B(G \geq 50) = P_N(G \geq 49,5)$$

$$P\left(Z \geq \frac{49,5 - 60}{4,90}\right) = P(Z \geq -2,14) = 0,9838$$

Exercice 2.

Enoncé.

La fabrication de pièces dans un atelier donne lieu à un certain pourcentage de pièces rebutées. On a observé 100 lots de 100 pièces chacun. Le nombre de pièces rebutées par lot a pour distribution observée :

NOMBRE DE PIÈCES REBUTEES PAR LOT	NOMBRE DE LOTS
1	2
2	9
3	14
4	20
5	18
6	15
7	9
8	6
9	4
10	2
11	1

Montrer que la distribution du nombre de pièces rebutées par lot peut être raisonnablement ajustée par une loi de Poisson ($\alpha = 5\%$)

Résolution.

Moyenne du nombre de pièces rebutées par lot : 5 (500 pièces à rebuter pour 100 lots)

Calcul des effectifs théoriques avec la loi de Poisson ($m = 5$)

	t_i	O_i
$p_0 = e^{-5} 5^0 / 0! = 0,00673$	$\rightarrow 100p_0 = 0,673$	} 12,463 11
$p_1 = e^{-5} 5^1 / 1! = 0,03368$	$\rightarrow 100p_1 = 3,368$	
$p_2 = e^{-5} 5^2 / 2! = 0,08422$	$\rightarrow 100p_2 = 8,422$	
$p_3 = e^{-5} 5^3 / 3! = 0,14037$	$\rightarrow 100p_3 = 14,037$	14
$p_4 = e^{-5} 5^4 / 4! = 0,17546$	$\rightarrow 100p_4 = 17,546$	20
$p_5 = e^{-5} 5^5 / 5! = 0,17546$	$\rightarrow 100p_5 = 17,546$	18
$p_6 = e^{-5} 5^6 / 6! = 0,14622$	$\rightarrow 100p_6 = 14,622$	15
$p_7 = e^{-5} 5^7 / 7! = 0,10144$	$\rightarrow 100p_7 = 10,444$	9
$p_8 = e^{-5} 5^8 / 8! = 0,06527$	$\rightarrow 100p_8 = 6,527$	6
$p_9 = e^{-5} 5^9 / 9! = 0,03626$	$\rightarrow 100p_9 = 3,626$	} 6,815 7
$p_{10} = e^{-5} 5^{10} / 10! = 0,01813$	$\rightarrow 100p_{10} = 1,813$	
$p_{11} = e^{-5} 5^{11} / 11! = 0,00824$	$\rightarrow 100p_{11} = 0,824$	
$p_{>11} = 1 - p_0 - p_1 - \dots - p_{11} = 0,00552$	$\rightarrow 100p_{>11} = 0,552$	

Hypothèse : ajustement par une loi de Poisson.

Il a fallu estimer un paramètre $\rightarrow ddl = 8 - 1 - 1 = 6$

Test χ^2 d'ajustement

$$\chi^2_{obs} = \frac{(11 - 12,463)^2}{12,463} + \frac{(14 - 14,037)^2}{14,037} + \frac{(20 - 17,546)^2}{17,546} + \frac{(15 - 14,622)^2}{14,622} + \frac{(9 - 10,444)^2}{10,444} + \frac{(6 - 6,527)^2}{6,527} + \frac{(7 - 6,815)^2}{6,815}$$

$$= 0,17173 + 0 + 0,34321 + 0,01174 + 0,00977 + 0,19964 + 0,04255 + 0,00502 = 0,78366$$

$\chi^2_{6;0,95} = 12,6$ L'hypothèse d'ajustement par une loi de Poisson $P(5)$ est donc acceptée.

Exercice 3.

Enoncé.

Lors du contrôle de fabrication des photodiodes pour capteurs de caméra, on mesure (entre autres) la sensibilité intrinsèque (taux de conversion photo/électron multiplié par un facteur).

Sur un échantillon exhaustif de 50 photodiodes, on a obtenu les résultats suivants pour la sensibilité :

$$\bar{x} = 10,108$$

$$S_{nc} = 0,8995$$

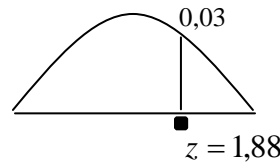
- Donner l'intervalle de confiance pour la sensibilité moyenne sur la population avec un risque de 6%.
- Combien de photodiodes aurait-il fallu mesurer pour avoir une précision de 0,1 avec le même risque de 6%. On utilisera l'échantillon des 50 comme pré-échantillon.

Résolution

a) Sur l'échantillon

$$S_c = 0,9087$$

$$\alpha = 0,06 \quad \frac{\alpha}{2} = 0,03$$



$$ET(\hat{\mu}) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \cdot 1 = \frac{0,9087}{\sqrt{50}} = 0,1285$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 10,108$$

$$\varepsilon = z * \frac{S_c}{\sqrt{n}} = 1,88 \cdot 0,1285 = 0,2416 \quad \rightarrow \quad 0,242$$

$$IC : \quad 9,866 \leq \mu \leq 10,350 \quad sf \quad \alpha = 6\%$$

b) On veut $\varepsilon = 0,1$

Donc

$$0,1 = 1,88 \frac{0,9087}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = 17,08\dots$$

$$n = 291,8\dots \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{292}} \text{ minimum}$$

Exercice 4.

Enoncé.

X est une variable aléatoire uniforme définie sur $]-1/2, 1/2[$

- Déterminer la fonction de répartition et la d.d.p. de $Y = \cos \pi X$.
- Calculer l'espérance mathématique de Y

Résolution.

- Fonction de répartition de Y : $F_Y(t) = P(Y \leq t)$

X prenant ses valeurs dans $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, Y prend les siennes sur $]0,1[$ puisque πX varie dans

$$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

- Si $t \leq 0$ alors $F_Y(t) = 0$

- Si $t \geq 1$ alors $F_Y(t) = 1$

- Si $0 < t < 1$ alors $F_Y(t) = P(0 < Y \leq t)$

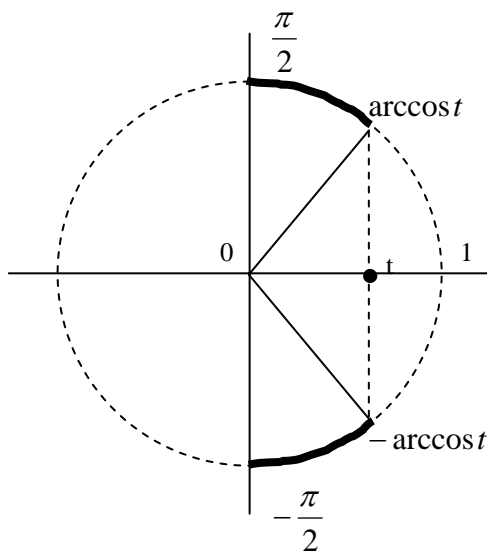
$$= P(0 < \cos \pi X \leq t)$$

$$= P\left(-\frac{\pi}{2} < \pi X \leq -\arccos t\right) + P\left(\arccos t \leq \pi X < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= P\left(-\frac{1}{2} < X \leq -\frac{\arccos t}{\pi}\right) + P\left(\frac{\arccos t}{\pi} \leq X < \frac{1}{2}\right)$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{\arccos t}{\pi}} dx + \int_{\frac{\arccos t}{\pi}}^{\frac{1}{2}} dx \text{ puisque } f_X(x) = \begin{cases} 1 \text{ sur }]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$= 1 - \frac{2 \arccos t}{\pi}$$



Par suite

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - \frac{2 \arccos t}{\pi} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Densité de probabilité de Y

$$f_Y(t) = D_t F_Y(t)$$

$$\text{Donc } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi \sqrt{1-y^2}} & \text{si } y \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Espérance mathématique : $E(Y) = E(\cos \pi X) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos \pi x dx = \frac{2}{\pi}$

Exercice 5.

Enoncé.

Une variable aléatoire X est uniforme sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. Une variable aléatoire Y est exponentielle de moyenne $\frac{1}{a}$

($a > \frac{1}{2}$) sur $[0, \infty[$. Ces 2 variables étant indépendantes quelle est la probabilité pour que $x + y < a$?

Résolution

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

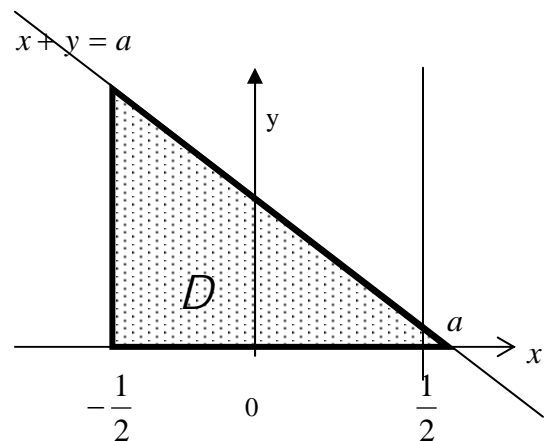
$$f_Y(y) = \begin{cases} ae^{-ay} & \text{sur } [0, +\infty[, a > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} ae^{-ay} & \text{sur } \Omega = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\times]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{On demande } P[2(X + Y) < 2a] &= P(X + Y < a) \\ &= a \iint_D e^{-ay} dx dy \quad \text{avec } D = \Omega \cap \{(x, y) : x + y < a\} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \leq a \leq \infty$$

$$\begin{aligned} P((X + Y) < a) &= a \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{a-x} e^{-ay} dy \\ &= - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [e^{-a(a-x)} - 1] dx \\ &= 1 - e^{-a^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{ax} dx \\ &= 1 - \frac{e^{-a^2}}{a} \left(e^{\frac{a}{2}} - e^{-\frac{a}{2}} \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-a^2}}{a} 2sh \frac{a}{2} \\ &= \frac{a - 2e^{-a^2} sh \frac{a}{2}}{a} \end{aligned}$$



Exercice 6.

Enoncé.

Soient deux échantillons de dix éprouvettes chacun.

On mesure la résistance de ces éprouvettes et on détient les résultats suivants :

$$\text{Echantillon 1 : } \bar{x}_1 = 31,903 \quad s_{1c} = 0,4266$$

$$\text{Echantillon 2 : } \bar{x}_2 = 31,589 \quad s_{2c} = 0,1510$$

En supposant l'égalité des variances, peut-on admettre, en ce qui concerne la résistance moyenne, que ces deux échantillons proviennent de la même production, dans laquelle la résistance suit une loi normale, en acceptant un risque d'erreur de 2% ?

Résolution

Il s'agit d'un test de comparaison de moyennes.

Soient l'hypothèse $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

Et l'hypothèse $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (test bilatéral)

L'écart type σ est inconnu et la taille des échantillons est petite ($n_1 = n_2 = 10$). Sous l'hypothèse H_0, \dots la loi de

probabilité de $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ est normale de moyenne $\mu_1 - \mu_2 = 0$ et d'écart type de $\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \sigma \sqrt{\frac{2}{n}}$.

L'estimateur non biaisé de σ^2 est $s_c^2 = \frac{n_1 s_{1c}^2 + n_2 s_{2c}^2}{n_1 + n_2 - 2}$ où s_1 et s_2 sont les écarts-type non corrigés des échantillons.

Etant donné que $s_{1c}^2 = 0,1820$ et $s_{2c}^2 = 0,0228$, $s_c^2 = 0,1138$ et $s_c = 0,3373$.

Comme les échantillons sont petits, la variable $\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s \sqrt{2/n}}$ suit une loi de Student-Fisher à $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 18$ degrés

de liberté. Au risque $\alpha = 0,02$, nous obtenons dans la table $t_{0,99} = 2,55$.

La règle de décision est

$$\begin{array}{ll} \text{accepter } H_0 (\mu_1 = \mu_2) & \text{si } |t_{obs}| < 2,55 \\ \text{rejeter } H_0 (\mu_1 \neq \mu_2) & \text{si } |t_{obs}| \geq 2,55 \end{array}$$

$$\text{Or } t_{obs} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{2/n}} = \frac{31,903 - 31,589}{0,3373 \sqrt{2/10}},$$

Donc $|t_{obs}| < 2,55$ et on accepte H_0