# Exercice 1.

## Enoncé.

On considère l'équation $AX = B$ où $A$ et $B$ sont des variables aléatoires indépendantes distribuées uniformément respectivement dans $[1,r](r > 1)$ et $[0,1]$.

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable $X$ ainsi que sa densité de probabilité.

b) Calculer $E(X)$ et $ET(X)$.

c) Calculer $\lim\limits_{r\to 1} E(X)$ et $\lim\limits_{r\to 1} ET(X)$.

Interpréter les résultats obtenus.

## Résolution.

a) On a

$$X = \frac{B}{A} \in [0,1]$$

de sorte que

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \le 0 \\ P(X \le t) & \text{si} \quad t \in ]0,1[ \\ 1 & \text{si} \quad t \ge 1 \end{cases}$$

Calculons $F_X(t)$ dans le cas où $t \in ]0,1[$ ; il vient

$$F_X(t) = P(X \le t) = P(B \le At) = P((A,B) \in E)$$

si

$$E = \{(x,y) : y - xt \le 0\}.$$

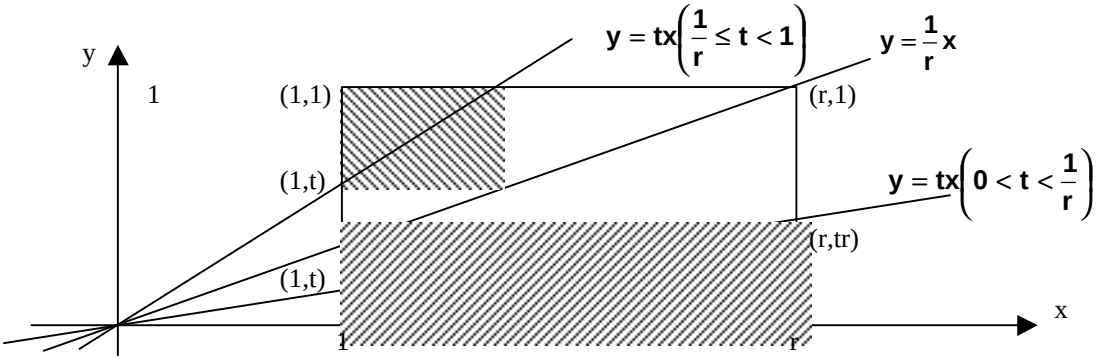
Les variables $A,B$ sont distribuées uniformément dans $\Omega = [1,r]X[0,1]$ puisque

$$f_{A,B}(x,y) = f_A(x)f_B(y) = \frac{1}{r-1}$$

en utilisant le fait que $A,B$ sont indépendantes et distribuées uniformément dans $[1,r]$ et $[0,1]$. Il s'ensuit que

$$F_X(t) = P((A,B) \in E) = \frac{\text{aire}(E \cap \Omega)}{\text{aire}(\Omega)} = \frac{\text{aire}(E \cap \Omega)}{r-1}$$

Représentons graphiquement $E \cap \Omega$.




Si $0 < t < \frac{1}{r}, E \cap \Omega$ est le trapèze hachuré de sorte que

$$\text{aire}(E \cap \Omega) = \frac{t(r+1)(r-1)}{2}$$

Si $\frac{1}{r} \le t < 1, E \cap \Omega$ est la région de $\Omega$ extérieure au triangle hachuré, d'où

$$\text{aire}(E \cap \Omega) = (r-1) - \frac{\left(\frac{1}{t} - 1\right)(1-t)}{2} = (r-1) - \frac{(1-t)^2}{2t}$$

Par conséquent,

$$F_X(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\le 0\\ \dfrac{(r+1)t}{2} & \text{si } 0<t<\dfrac{1}{r}\\ 1-\dfrac{(1-t)^2}{2(r-1)t} & \text{si } \dfrac{1}{r}\le t<1\\ 1 & \text{si } t\ge 1\end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$f_X(t)=F_X'(t)=\begin{cases}\dfrac{r+1}{2} & \text{si } 0<t<\dfrac{1}{r}\\ \dfrac{1}{2(r-1)}\left(\dfrac{1}{t^2}-1\right) & \text{si } \dfrac{1}{r}\le t<1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

b) On a

$$E(X)=\int_0^1 tf_X(t)dt=\frac{r+1}{2}\int_0^{\frac{1}{r}} tdt+\frac{1}{2(r-1)}\int_{\frac{1}{r}}^1\left(\frac{1}{t}-t\right)dt$$

$$=\frac{r+1}{2}\frac{1}{2r^2}+\frac{1}{2(r-1)}\left[-\ln\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

$$=\frac{r+1}{4r^2}+\frac{\ln r}{2(r-1)}-\frac{r^2-1}{4r^2(r-1)}=\frac{\ln r}{2(r-1)}$$

N.B. : On a aussi

$$E(X)=E\left(\frac{B}{A}\right)=\iint_\Omega f_{A,B}(x,y)\frac{y}{x}dxdy=\frac{1}{r-1}\int_1^r\frac{dx}{x}\int_0^1 ydy=\frac{\ln r}{2(r-1)}$$

D'autre part, on a

$$\text{var}(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

Comme

$$E(X^2)=\int_0^1 t^2f_X(t)dt=\frac{r+1}{2}\int_0^{\frac{1}{r}}t^2dt+\frac{1}{2(r-1)}\int_{\frac{1}{r}}^1(1-t^2)dt$$

$$=\frac{r+1}{2}\frac{1}{3r^3}+\frac{1}{2(r-1)}\left[\left(1-\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{r^3}\right)\right]$$

$$=\frac{r+1}{6r^3}+\frac{1}{2r}\left[1-\frac{1}{3}\frac{r^2+r+1}{r^2}\right]=\frac{1}{3r}$$

il vient

$$\text{var}(X)=\frac{1}{3r}-\frac{\ln^2 r}{4(r-1)^2}$$

d'où

$$ET(X)=\sqrt{\frac{1}{3r}-\frac{\ln^2 r}{4(r-1)^2}}$$

N.B. : On a aussi $E(X^2)=E\left(\dfrac{B^2}{A^2}\right)=\iint_\Omega f_{A,B}(x,y)\dfrac{y^2}{x^2}dxdy=\dfrac{1}{r-1}\displaystyle\int_1^r\frac{dx}{x^2}\int_0^1 y^2dy=\frac{1}{3r}$

c) En appliquant le théorème de l'Hospital, on obtient $\lim\limits_{r\to1}E(X)=\lim\limits_{r\to1}\dfrac{\ln r}{2(r-1)}="\dfrac{0}{0}"=\lim\limits_{r\to1}\dfrac{1}{2r}=\dfrac{1}{2}$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{r\to1}ET(X)=\sqrt{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{1}{12}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Interprétons ces résultats : si $r\to1$, la variable $A$ finit par prendre l'unique valeur 1, de sorte que $X=B$.

Par conséquent,

$$\lim_{r\to1}E(X)=E(B)\text{ et }\lim_{r\to1}ET(X)=ET(B).$$

# Exercice 2.

## Enoncé.

Une usine fabrique des lames très fines. On mesure en microns leur épaisseur sur un échantillon de 616 lames prises au hasard.

a) D'après le tableau des mesures, peut-on admettre, au seuil de signification 5%, que l'épaisseur des lames suit une loi normale ?

| épaisseur en microns | effectif. observé |
|---|---|
| moins de 2,5 | 8 |
| de 2,5 à moins de 3,5 | 47 |
| de 3,5 à moins de 4,5 | 121 |
| de 4,5 à moins de 5,5 | 219 |
| de 5,5 à moins de 6,5 | 149 |
| de 6,5 à moins de 7,5 | 60 |
| 7,5 et plus | 12 |

b) En admettant que cette mesure suit une loi normale, pour la production entière, peut-on affirmer que sa moyenne est supérieure à 5 microns

1° ) au seuil de signification 3%

2° ) Même question au de signification 1%.

⚠ Suggestion : arrondi à 2 décimales.

c) Calculer le risque d'erreur de seconde espèce $(\beta)$ obtenu en admettant que la moyenne globale est de 5 microns avec un risque d'erreur de première espèce de 1%, alors qu'elle est en réalité de 5,2 microns

## Résolution.

a) Les calculs donnent $\overline{X} = 5{,}107\ \mu m$ et $s_c = s = 1{,}19\ \mu m$.

L'ajustement par la loi normale $N(5{,}11;1{,}19)$ conduit aux valeurs théoriques suivantes, pour les mêmes classes : **8,81 ; 45,70 ; 133,36 ; 199,77 ; 153,81 ; 60,49 ; 14,04**

Par un test de $\chi^2$ on obtient $\chi^2_{obs} = 3{,}56$.

Comme on a estimé les paramètres $m$ et $\sigma$ par $\overline{X}$ et $s$, le nombre de degré de liberté restant est $7 - 1 - 2 = 4$.

Au seuil de signification $\alpha = 5\%$, la valeur fournie dans la table est $\chi^2_{0,95;4ddl} = 9{,}49 = \chi^2_{crit}$.

Comme $\chi^2_{obs} < \chi^2_{crit}$, la différence n'est pas significative et on ne rejette pas l'ajustement.

b) Test d'hypothèses $\begin{matrix} H_0 : \mu = 5 \\ H_1 : \mu > 5 \end{matrix}$ (unilatéral).

Sous $H_0$, la moyenne d'échantillonnage suit la loi $N\left(5;\frac{1{,}2}{\sqrt{616}}\right)$ car $n \geq 30$.

Au seuil de signification $\alpha = 3\%$, on obtient $P(Z > z_c) \leq 0{,}03 \Leftrightarrow z_c = 1{,}88$ et $X_c = 5 + 1{,}88\frac{1{,}2}{\sqrt{616}}$ c-à-d 5,091.

Comme $\overline{x}_{obs} = 5{,}107 > 5{,}091$, on rejette $H_0$ et on peut affirmer, au seuil de signification $\alpha = 3\%$, que la moyenne globale est supérieure à 5µm.

Au seuil de signification $\alpha = 1\%$, on obtient $z_c = 2{,}33$ et $X_c = 5 + 2{,}33\frac{1{,}2}{\sqrt{616}} = 5{,}113$.

Comme $\overline{X}_{obs} < X_c$, on ne peut rejeter $H_0$ au seuil de signification $\alpha = 1\%$.

c) Le risque d'erreur $\beta$ lié à $\mu = 5{,}2$ est donné par $\beta = P(\overline{X} < 5{,}113 / \mu = 5{,}2)$. Or si $\mu = 5{,}2$, la moyenne d'échantillonnage suit la loi $N\left(5{,}2;\frac{1{,}2}{\sqrt{616}}\right)$ donc $\beta(5{,}2) = P\left(z \leq \frac{5{,}113 - 5{,}2}{1{,}2/\sqrt{616}}\right) = P(z \leq -1{,}80) = 0{,}036$

# Exercice 3.

## Enoncé.

Le paradoxe de Bertrand ou la signification de « choisir au hasard ».
Si on parle de choisir « au hasard » un nombre entre 1 et 10 inclus, tout le monde sait que cela signifie que chaque nombre a 1 chance sur 10.
Ce n'est pas toujours aussi évident.
Si on nous demande de choisir, dans un cercle de centre O et de rayon 1 une corde « au hasard », on peut hésiter entre plusieurs modèles.
Par exemple :

a) La corde est déterminée par son milieu $\mathbf{M}$ et choisir au hasard correspond à $\mathbf{M}$ a ses coordonnées distribuées uniformément sur le disque.

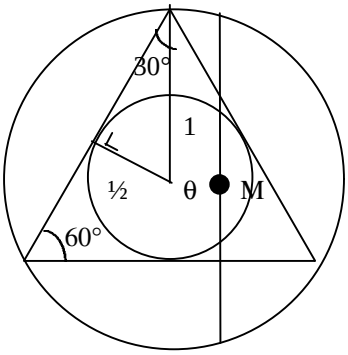
b) La corde est déterminée par ses extrémités et choisir au hasard revient à choisir indépendamment 2 angles uniformément entre $\mathbf{0}$ et $\mathbf{2\pi}$.

c) La corde est déterminée par sa distance à l'origine et par son inclinaison par rapport à l'horizontale et choisir au hasard revient à choisir une distance sur $[0,1]$ uniformément et un angle sur $[0,\pi]$ uniformément et de façon indépendante.

Calculez dans les 3 modèles la probabilité que la longueur de la corde soit supérieure à la longueur du coté du triangle équilatéral inscrit

## Résolution

**a)**



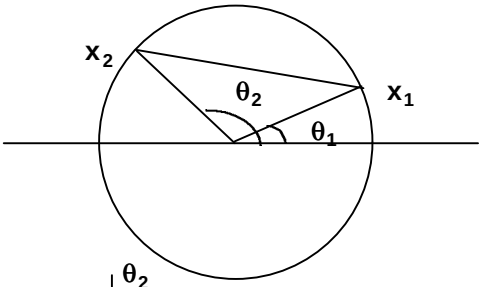

$\Omega =$ ens. des points M possibles
Soit L la longueur de la corde
Soit c la longueur du côté du triangle.

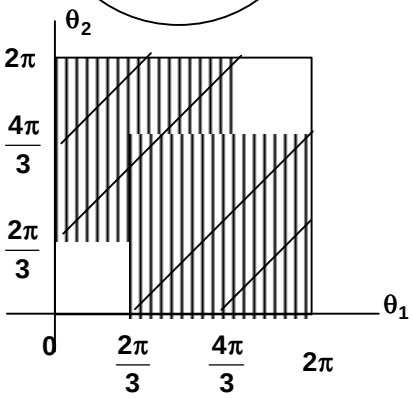
$$\mathbf{Pr}[\mathbf{L} > \mathbf{c}] = \mathbf{Pr}[\mathbf{M} \in \text{ disque centré en O et rayon } 1/2]$$

=(vu la distribution uniforme de M sur le disque)

$$= \frac{\text{surface du cercle de } \mathbf{r} = 1/2}{\text{surface du cercle de } \mathbf{r} = 1} = \frac{\pi(1/2)^2}{\pi(1)^2} = \frac{1}{4}$$

b)




$(\theta_1, \theta_2)$ est uniformément réparti sur $[0,2\pi[\times[0,2\pi[ = \Omega$.
Vu leur indépendance

$$\mathbf{Pr}[\mathbf{L} > \mathbf{c}] = \mathbf{Pr}\left[\frac{2\pi}{3} < |\theta_2 - \theta_1| < \frac{4\pi}{3}\right]$$

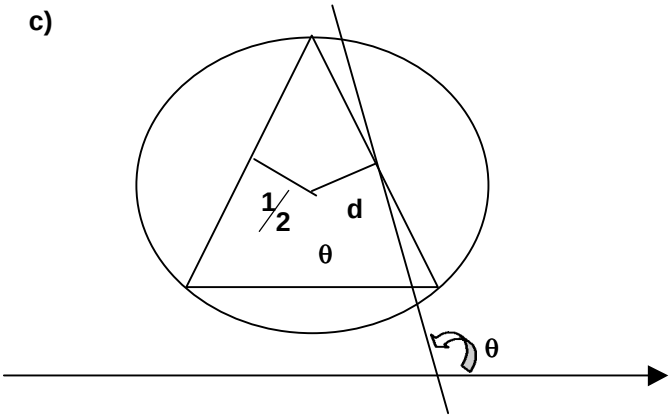
$= (\text{vu la distribution uniforme de } (\theta_1, \theta_2) \text{ sur } \Omega)$

$$= \frac{\text{surface } (S_1 + S_2)}{\text{surface } \Omega}$$

$$= \frac{2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2\right]}{4\pi^2}$$

$$= \frac{16\pi^2 - 4\pi^2}{9.4\pi^2} = \frac{3\pi^2}{9\pi^2} = \frac{1}{3}$$

**c)**




$(\mathbf{d}, \theta)$ est uniforme sur $[0,1] \times [0, \pi[$ vu leur indépendance

$\mathbf{Pr}[\mathbf{L} > \mathbf{c}]$

$= \mathbf{Pr}\left[0 \le \mathbf{d} < \frac{1}{2}\right]$

$= (\text{vu la loi uniforme de } \mathbf{d})$

$= \dfrac{1/2 - 0}{1 - 0} = \dfrac{1}{2}$