Théorèmes limites

Rappels

Inégalité de Markov

Si X est une V.A. positive on a, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{E[X]}{a}.$$

Inégalité de Tchebychev

Soir X une V.A. de moyenne μ et de variance σ^2. Pour tout $k > 0$ on a

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geqslant k) \leqslant \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

Théorème central limite

Si $X_1, X_2, \ldots$ est une suite de V.A. indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne μ et de variance σ^2, alors la distribution de la variable aléatoire

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

tend vers la loi Normale $N(0, 1)$.

Exercices

1. Le nombre d'automobiles vendues en une semaine chez un certain concessionnaire est une variable aléatoire dont l'espérance vaut 16. Donner une borne supérieure de la probabilité que
   a) les ventes de la semaine prochaine dépassent 18.
   b) les ventes de la semaine prochaine dépassent 25.
2. On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50. On sait en plus que la variance de la production hebdomadaire est de 25. Peut-on estimer la probabilité que la production de la semaine à venir soit comprise entre 40 et 60 ?
3. La fluctuation du prix de l'action d'une société donnée, cotée en bourse, est une variable aléatoire d'espérance 0 et de variance σ^2. Cela veut dire que, si Y_n représente le prix de l'action du n$^{\text{ème}}$ jour,

$$Y_n = Y_{n-1} + U_n \quad n \geqslant 1$$

où U_1, U_2, ... sont des variables aléatoires continues, indépendantes et identiquement distribuées d'espérance 0 et de variance σ^2. Supposons que le prix de l'action soit aujourd'hui de 100, c'est-à-dire $y_0 = 100$ et que $\sigma^2 = 1$.
Donner, en exploitant l'inégalité de Tchebychev, une borne inférieure pour la probabilité que le prix de l'action soit compris entre 95 et 105 dans 10 jours.

4. D'après le "Statistical Abstract of the United States", la probabilité qu'un nouveau né soit une fille est de $0,487$. Quelle est la probabilité que, lors des 1000 prochaines naissances, on compte
   a) moins de 480 filles ?
   b) plus de 520 filles ?
5. On considère une suite X_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ de variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètre 1. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
   a) Quelle est la loi de S_n ?
   b) Montrer que $\mathbb{P}(S_n \leqslant n) = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$.
   c) À l'aide du théorème central limite, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

6. Devant l'augmentation des problèmes de poids dans la population européenne, une nouvelle étude est mandatée pour mesurer la relation entre celui-ci et la quantité de calories ingérées par habitant. Des études antérieures montrent qu'un Européen consomme en moyenne 2700 calories par jour avec un écart-type de 800. On dispose dans cette étude d'un échantillon de 500 européens.
   a) Formaliser le problème en définissant les variables aléatoires appropriées avec leur distribution.
   b) Calculer la probabilité que la moyenne des calories consommées par jour par les Européens dans l'échantillon soit supérieure à 2750.
7. Le nombre d'inscriptions à un cours d'économie politique est une variable aléatoire de Poisson de paramètre 100. Le professeur donnant ce cours a décidé que si le nombre d'inscriptions est au-delà de 120, il créera 2 sections et donnera donc 2 cours, tandis qu'en deçà une seule classe sera formée.
   Quelle est la probabilité que ce professeur ait à donner 2 fois ce cours ?