Espace probabilisé
et
Probabilité conditionnelle

Rappels

Mesure de probabilité

On dit que $\mathbb{P}$ est une *mesure de probabilité* sur un espace S si
- $0 \leqslant \mathbb{P}(E) \leqslant 1$ pour tout événement E
- $\mathbb{P}(S) = 1$
- pour toute séquence E_i où les E_i sont mutuellement exclusifs (càd $E_i \cap E_j = \varnothing$ si $i \neq j$) on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(E_i)$$

Conséquences :
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- $\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E)$
- $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$

Probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Soient A_1, A_2, …, A_n des événements mutuellement excusifs sur l'espace S tels que $\bigcup_{i=1}^n A_i = S$, on dit que A_1, …, A_n forment une *partition de l'espace*

Formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Cas particulier :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})$$

Formule I de Bayes :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Formule II de Bayes :

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

Indépendance

Deux événements A et B sont *indépendants* si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Conséquences :
- $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

Exercices - Espace probabilisé

1. La probabilité qu'un individu pris au hasard apprécie à la fois le théâtre et le cinéma est de $0,15$. D'autre part, la probabilité qu'il apprécie le théâtre est de $0,3$ et celle qu'il apprécie le cinéma ou le théâtre est de $0,6$. Déterminez la probabilité qu'il n'aime pas le cinéma.
2. Dans une entreprise, 40% des vendeurs réalisent au moins 3 ventes par jour, 10% ont suivi un stage de négociation, 7% ont suivi le stage et réalisent au moins 3 ventes par jour. Quelle est la probabilité qu'un vendeur pris au hasard :
   a) ait suivi le stage ou réalise au moins trois ventes par jour ?
   b) réalise au moins 3 ventes par jour et n'ait pas suivi le stage ?
   c) réalise moins de 3 ventes par jour et ait suivi le stage ?
   d) réalise au plus 2 ventes par jour et n'ait pas suivi le stage ?
3. Un service météorologique a établi qu'au cours d'une journée d'avril, il pleut avec une probabilité de $0,35$ et il neige avec une probabilité de $0,08$. D'autre part, il y a une température supérieure ou égale à 20 degrés avec une probabilité de $0,52$. Il y a de la pluie et une température inférieure à 20 degrés avec une probabilité $0,2$. La pluie et la neige sont des événements incompatibles, de même que la neige et une température supérieure à 20 degrés. Quelle est la probabilité que lors d'une journée d'avril :

a) il pleuve ou il neige ?

b) il n'y ait ni pluie ni neige ?

c) il y ait de la neige et une température inférieure à 20 degrés ?

d) il pleuve ou la température soit inférieure à 20 degrés ?

4. Une classe de 100 étudiants se compose des quatre groupes suivants :

	Garçons	Filles
Inscrit en informatique	22	4
Inscrit en ingénieur	61	13

On choisit un étudiant au hasard comme délégué de classe. Quelle est la probabilité que ce soit :

a) un garçon ?

b) une fille ?

c) un(e) étudiant(e) d'informatique ?

d) un garçon inscrit en ingénieur ?

e) un(e) étudiant(e) d'informatique ou un garçon ?

f) une fille non inscrite en informatique ?

g) ni un(e) étudiant(e) d'ingénieur, ni une fille ?

5. On lance deux dés (non truqués) et on représente le résultat de cette épreuve aléatoire par un couple (X,Y) où X est le résultat de lancer du premier dé et Y celui du second dé.

a) Combien y a-t-il de résultats possibles ?

b) Quelle est la probabilité :

i. d'obtenir un double 6 ?

ii. de ne pas obtenir un double ?

iii. d'obtenir un résultat dont la somme vaut 11 ?

iv. d'obtenir un résultat dont la somme vaut 8 ?

v. d'obtenir un résultat dont la somme vaut au moins 8 ?

vi. d'obtenir un résultat dont la somme vaut plus de 8 ?

vii. d'obtenir un résultat dont la somme vaut au plus 8 ?

viii. d'obtenir un résultat dont la somme vaut au moins 9 ?

ix. d'obtenir une somme paire ?

c) Sur quelle valeur de la somme est-il le plus intéressant de parier ? Pourquoi ?

6. Un groupe d'étudiants est formé de 20 étudiants de première année (10 filles et 10 garçons) et de 30 étudiants de deuxième année (18 filles et 12 garçons). On choisit une personne au hasard dans ce groupe. Déterminez la probabilité qu'elle soit :
   a) de première année.
   b) un garçon.
   c) une fille de deuxième année.
7. Une urne contient 4 boules rouges, 6 boules blanches, 2 boules vertes et 8 boules noires. Deux boules sont extraites de la boîte. Le tirage est sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir
   a) deux boules rouges ?
   b) une boule blanche et une boule noire ?
   c) une boule rouge puis une boule noire ?
   d) aucune boule noire ?
8. On considère un jeu de 52 cartes dans lequel on tire au hasard 4 cartes. Le tirage est sans remise, l'ordre du tirage n'étant pas important.
   a) De combien de façons différentes peut être constituée une main de 4 cartes ?
   b) Calculer la probabilité d'obtenir
      i. un carré d'as.
      ii. deux as et deux rois.
      iii. une seule dame.
      iv. 3 cartes de coeur et une pique.

Exercices - Probabilité conditionnelle

1. On considère une famille avec 2 enfants. On suppose que la venue d'une fille est aussi certaine que celle d'un garçon.
   a) Quelle est la probabilité que les 2 enfants soient des garçons sachant que l'aîné est un garçon ?
   b) Quelle est la probabilité que les 2 enfants soient des garçons sachant qu'au moins un des enfants est un garçon ?
2. On jette 2 dés équilibrés.
   a) Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux donne 6, sachant que les 2 résultats sont différents ?

b) Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux donne 6, sachant que leur somme vaut i ? Calculer le résultat pour toutes les valeurs possibles de i.

3. Un certain système a 5 composantes. Une panne du système est causée 35%, 30%, 20%, 10% et 5% des fois par une panne dans les composantes A, B, C, D et E, respectivement. On suppose que les pannes simultanées dans plus d'une composante à la fois sont si rares qu'on peut les négliger.

   a) Si une panne du système n'est pas causée par A, quelle est la probabilité qu'elle soit causée par B.

   b) Si une panne su système n'est causée ni par A, ni par B, quelle est la probabilité qu'elle soit causée par C ou D ?

4. On compte respectivement 50, 75 et 100 employés dans 3 entrepôts A, B et C, les proportions des femmes étant respectivement égales à 50%, 60% et 70%. Une démission a autant de chance de se produire chez tous les employés, indépendamment de leur sexe. Une employée donne sa démission. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entrepôt C ?

5. Tous les meilleurs joueurs du monde sont inscrits au tournoi de tennis de Diamond City pour lequel le 1^er^ prix est une rivière en diamants. On estime *a priori* que Roger Federer a 4 chances sur 10 de gagner, Andy Roddick 3 chances sur 10 et Lleyton Hewitt 2 sur 10. Si par hasard Roger Federer se blesse et annule sa participation au dernier moment, que deviennent les chances respectives de Andy Roddick et Lleyton Hewitt de remporter la rivière de diamants ?

6. Dans un pays où il naît autant de filles que de garçons, le docteur Gluck prévoit le sexe des enfants à naître. Il se trompe 1 fois sur 10 si c'est un garçon et 1 fois sur 20 si c'est une fille. Aujourd'hui il vient de dire à Mme Parisod qu'elle aurait une fille. Quelle est la probabilité pour que cela soit vrai ?

7. Une compagnie d'assurance répartit les assurés en 3 classes : personne à bas risque, risque moyen et haut risque. Ses statistiques indiquent que la probabilité qu'une personne soit impliquée dans un accident sur une période d'un an est respectivement de $0,05$, $0,15$ et $0,30$. On estime que 20% de la population est à bas risque, 50% à risque moyen et 30% à haut risque.

   a) Quelle est la proportion d'assurés qui ont eu un accident ou plus au cours d'une année donnée ?

   b) Si un certain assuré n'a pas eu d'accidents l'année passée, quelle est la probabilité qu'il fasse partie de la classe à bas risque ?

8. À Londres, il pleut en moyenne 1 jour sur 2 et donc la météo prévoit de la pluie la moitié des jours. Les prévisions sont correctes 2 fois sur 3, c'est-à-dire les probabilités qu'il pleuve quand on a prévu de la pluie et qu'il ne pleuve pas quand on a prévu du temps sec sont égales à 2/3. Quand la météo prévoit de la pluie, Mr. Pickwick prend toujours son parapluie. Quand la météo prévoit du temps sec, il le prend avec une probabilité 1/3. Calculer :
   a) la probabilité que Mr. Pickwick prenne son parapluie un jour quelconque ;
   b) la probabilité que la météo ait prévu de la pluie sachant qu'il a pris son parapluie ;
   c) la probabilité que la météo ait prévu du beau temps alors qu'il pleut.
9. Le sultan dit à Ali Baba : "Voici 2 urnes, 4 boules blanches (b) et 4 boules noires (n). Répartis les boules dans les urnes, mais je rendrai ensuite les urnes indiscernables. Tu auras la vie sauve en tirant une boule blanche."
   a) Quelle est la probabilité qu'Ali Baba ait la vie sauve s'il place les 4 boules blanches dans la $1^{\text{ère}}$ urne et les 4 noires dans la $2^{\text{ème}}$?
   b) Idem avec 2b + 2n dans la $1^{\text{ère}}$ urne et 2b + 2n dans la $2^{\text{ème}}$.
   c) Idem avec 3b dans la $1^{\text{ère}}$ urne et 1b + 4n dans la $2^{\text{ème}}$.
   d) Comment Ali Baba maximise-t-il ses chances ?
10. Les assistants sociaux travaillant pour une clinique psychatrique sont si occupés qu'en moyenne seuls 60% des patients prospectifs téléphonant pour la $1^{\text{ère}}$ fois obtiendront une communication avec l'un des assistants. On demande aux autres de laisser leur numéro de téléphone. Trois fois sur 4 un assistant trouve le temps de rappeler le jour même, autrement le rappel a lieu le lendemain. L'expérience a montré que, dans cette clinique, la probabilité que le patient prospectif demande une consultation est de $0,8$ s'il a pu parler immédiatement à un assistant, tandis qu'elle tombe à $0,6$ et $0,4$ respectivement s'il y a eu rappel du patient le jour même ou le lendemain.
    a) Quel pourcentage des patients qui appellent demande une consultation ?
    b) Quel pourcentage des patients en consultation n'a pas eu à attendre qu'on les rappelle ?

11. On a à disposition 2 tests sanguins pour le dépistage du VIH : d'une part l'ELISA, relativement bon marché (environ 20€) et raisonnablement fiable, et d'autre part le Western Blot (WB), nettement meilleur mais beaucoup plus cher (environ 100€).
    Un patient vient vers vous, un médecin, avec des symptômes vous suggérant qu'il peut être VIH-positif. Pour ce patient, la prévalence du VIH est estimée par la littérature médicale à $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\text{il est VIH-positif}) = 0,01$. Les données concernant des personnes dont on connaît le statut VIH apportent :
    $\mathbb{P}(\text{ELSA positif} \mid \text{VIH-positif}) = 0,95$;
    $\mathbb{P}(\text{ELISA négatif} \mid \text{VIH-négatif}) = 0,98$.
    En utilisant le théorème de Bayes, calculer $\mathbb{P}(\text{VIH-positif} \mid \text{ELISA négatif})$ et $\mathbb{P}(\text{VIH-négatif} \mid \text{ELISA positif})$.
    Quelle(s) conséquence(s) peut-on tirer sur l'utilisation de l'ELISA ?
12. L'hôpital de Jujuy, petite ville du Nord-Ouest de l'Argentine, compte parmi ses malades 4% qui sont d'origine basque, 58% d'origine espagnole, 32% d'origine indienne et 6% d'origine italienne. Sachant que 3% des Indiens ont un sang de rhésus négatif, ainsi que 87% des Basques et 22% des populations d'origine latine, quelle est la probabilité pour qu'une éprouvette de sang de rhésus négatif provienne d'un malade d'origine basque ?
13. Freddy fait une sauce au vin que le monde entier vient goûter. Comme elle est très délicate, il la rate 1 fois sur 10 s'il utilise du Bordeaux ou du Bourgogne et 1 fois sur 5 avec du Côtes-du-Rhône. Dans sa cuisine, Freddy a une bouteille ouverte dont il a perdu l'étiquette. Connaissant la proportion de ces 3 vins dans sa cave, il estime que les chances que cette bouteille soit un Bordeaux, un Bourgogne ou un Côtes-du-Rhône sont respectivement de 40%, 30% et 30%. Freddy utilise cette bouteille pour faire sa sauce et la rate. Quelles doivent être ses nouvelles estimations sur la provenance de la bouteille ?
14. Une de vos patientes a une grosseur dans la poitrine. Vous êtes presque sûr(e) que cette tumeur est bénigne. Plus précisément, vous estimez qu'il y a seulement 1% de chance que cette petite tumeur soit maligne. Pour le confirmer, vous effectuez une radiographie aux rayons X. Vous connaissez l'efficacité de cette méthode pour détecter le cancer. La littérature admet que dans 80% des cas, les rayons X détectent correctement la nature du cancer s'il est malin et dans 90% s'il est bénin. Malheureusement, les rayons X indiquent que la tumeur de votre patiente est maligne.
    a) Quelle est alors la probabilité que votre patiente souffre effective-

ment d'un cancer du sein ? Commentez.

b) Supposons maintenant qu'une nouvelle machine aux rayons X arrive sur le marché. Cette machine détecte correctement la nature du cancer avec probabilité p, qu'il soit bénin ou malin. Quelle doit être la valeur de p afin que la probabilité que votre patiente souffre effectivement d'une tumeur maligne si les rayons X l'indiquent soit égale à 80% ?

15. (de F. Van Lishout) Supposons que la probabilité qu'un premier bachelier réussisse le cours de géométrie soit de 70%, que celle qu'il réussisse le cours d'algèbre soit de 60% et que celle qu'il réussisse ces deux cours soit de 40%.
    (a) Quelle est la probabilité qu'il réussisse au moins un des deux cours ?
    (b) Quelle est la probabilité qu'il rate les deux ?
    (c) Quelle est la probabilité qu'il réussisse le cours de géométrie s'il a réussi l'algèbre ?
    (d) Quelle est la probabilité qu'il rate le cours de géométrie s'il a raté l'algèbre ?
16. (de F. Van Lishout) La probabilité que la Belgique gagne un matche de football à domicile contre un pays de l'UEFA a été estimée à 62% par temps sec et 70% par temps pluvieux. Au stade Roi Baudouin, la probabilité de temps pluvieux lors d'un match de foot a été estimée à 30%. Sachant que la Belgique vient de gagner un match au stade Roi Baudouin, quelle est la probabilité qu'il ait plu ?
17. (de F. Van Lishout) Une population compte 1% de diabétiques. Un test de dépistage déclare un diabétique positif avec une probabilité de $0,98$ et déclare un non-diabétique négatif avec une probabilité de $0,99$. Quelle est la probabilité qu'un déclaré positif le soit à tort et qu'un individu déclaré négatif soit diabétique ?
18. (de F. Van Lishout) Un voleur s'intruduit dans une maison pendant la nuit. Arrivé dans la chambre, il s'apprête à fouiller les deux tiroirs de la commode. Le premier contient 5 pièces d'or et 8 pièces d'argent, tandis que le second en contient 7 d'or et 4 d'argent. Maladroit, il a oublié de remplacer la pila dans sa lampe de poche, qui tombe en panne. Dans sa précipitation, il n'arrive qu'à ouvrir l'un des tiroirs et prend une pièce au hasard avant de s'enfouir en courant.
    (a) Quelle est la probabilité que la pièce soit en or ?
    (b) Si la pièce est en argent, quelle est la probabilité qu'elle soit issue du premier tiroir ?