Analyse Combinatoire

Rappels

Symboles Combinatoires

Tirage de p parmi n éléments

	avec remise	sans remise
ordre important	$\mathcal{B}_n^p = n^p$	$\mathcal{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
ordre non-important	-	$\mathcal{C}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

Coefficients Binomiaux

$$\mathcal{C}_n^0 = \mathcal{C}_n^n = 1, \quad \mathcal{C}_n^p = \mathcal{C}_n^{n-p}$$
$$\text{Si } 0 < p < n, \text{ alors } \mathcal{C}_n^p = \mathcal{C}_{n-1}^p + \mathcal{C}_{n-1}^{p-1}$$
$$\text{Si } 0 < p \leqslant n, \text{ alors } \mathcal{C}_n^p = \frac{n}{p}\mathcal{C}_{n-1}^{p-1}$$

Nombre de Catalan

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_{2n}^n - \mathcal{C}_{2n}^{n-1}$$

Exercices

1. Combien peut-on former de mots de 8 lettres, la première étant une voyelle et la dernière une consonne ?
2. En supposant qu'il n'y a pas de répétitions,
   a) combien de nombres de 3 chiffres peut-on former à l'aide des chiffres 2, 3, 5, 6, 7 et 9 ?
   b) combien de ces nombres sont inférieurs à 400 ?
   c) combien sont pairs ?
   d) combien sont impairs ?
   e) combien sont des multiples de 5 ?
3. De combien de manières différentes 11 joueurs d'une équipe de football peuvent-ils se voir attribuer les maillots numérotés de 1 à 11 ?

4. Avec 12 députés et 8 sénateurs, on veut former une commission composée de 4 députés et de 3 sénateurs. De combien de manières peut-on former cette commission ?
5. a) Combien de nombres de 5 chiffres peut-on former avec 1, 2, 3, 4 et 5 ?

   b) Combien y a-t-il de ces nombres où les chiffres 2, 3, 4 sont toujours ensemble

   - dans cet ordre ?
   - dans un ordre quelconque ?
6. En fin d'année académique, 17 étudiants d'une section donnée recevront l'une des notes suivantes : PGD, GD, D, S ou A. De combien de façons pourra se présenter le palmarès de cette classe (en conservant l'ordre alphabétique) ?
7. Combien existe-t-il de nombres qui s'écrivent avec des chiffres tous distincts, qui sont multiples de 5 et qui sont strictement entre 1000 et 9000.
8. Si 4 américains, 3 français et 2 anglais doivent s'asseoir dans une même rangée, de combien de façons peuvent-ils s'asseoir sachant que les personnes d'une même nationalité vont s'asseoir tous ensemble ?
9. Le jeu *Cluedo* consiste à retrouver l'assassin du Dr. Lenoir, l'arme et le lieu du crime. Sachant qu'il y a six armes, neuf lieux et six suspects, de combien de manières différentes le meurtre a-t-il pu être commis ?
10. Dans une université, dont la faculté des sciences se compose de sept professeurs d'informatique, quinze professeurs de chimie, douze professeurs de physique, huit professeurs de mathématiques et cinq professeurs de biologie, combien de choix d'un représentant de la faculté de sciences peut-on faire ?
11. Les plaques d'immatriculation belges sont constitutées de trois lettres suivies de trois chiffres (exemple : ABC-123). Combien de plaques différentes peut-on former ?
12. De combien de manières peut-on asseoir en rang 3 garçons et 3 filles ?

    a) Même question si les garçons doivent rester ensemble ?

    b) Même question si les garçons doivent rester ensemble et les filles aussi ?

    c) Même question si deux personnes du même sexe ne doivent jamais voisiner ?

13. Une délégation de 4 élèves est choisie chaque année pour suivre le congrès annuel de l'Association de Parents.
    a) De combien de manières peut-on former la délégation, s'il y a 12 élèves éligibles ?
    b) De combien de manières peut-on former la délégation, si deux des élèves éligibles refusent de participer ensemble au congrès ?
    c) De combien de manières peut-on former la délégation, si deux des élèves éligibles ne peuvent suivre le congrès qu'ensemble ?
14. Pour former le conseil d'administration d'une entreprise, 6 personnes doivent être choisies parmi 10 hommes et 8 femmes. De combien de façons différentes peut-on former ce conseil si :
    a) il faut au moins 4 hommes ?
    b) il faut 4 hommes et 2 femmes ?
    c) il faut 4 hommes et 2 femmes, mais 2 hommes refusent de siéger ensemble ?
15. De combien de manières peut-on tirer l'une après l'autre 3 cartes d'un jeu de 52 cartes
    a) le tirage étant avec remise ?
    b) le tirage étant sans remise ?
16. Une étudiante doit répondre à 7 questions parmi 10. De combien de choix dispose-t-elle ? Et combien si elle doit choisir 3 parmi les 5 premières ?
17. Considérons un examen de type QCM, avec 20 questions et 4 réponses possibles par question.
    a) Calculer le nombre total de formulaires complets différents possibles.
    b) Si le candidat ne doit répondre qu'à 75% des questions exactement, de combien de choix de questions dispose-t-il ? Même question, mais lorsque le candidat ne peut choisir la première mais doit prendre la dernière.
    c) Supposons que les questions sont réparties en 4 séries de 7, 4, 6 et 3 questions. Combien de possibilités de répartition a-t-on ?
18. Le département d'informatique d'une université propose 8 cours de niveau basique : $\{L_1, L_2, \ldots, L_8\}$ et 10 cours de niveau supérieur : $\{H_1, H_2, \ldots, H_{10}\}$. Un curus valide comporte 4 cours de niveau basique et 3 cours de niveau supérieur.

a) Combien de cursus sont possibles ?

b) Sachant que $\{H_1, \ldots, H_5\}$ ont comme prérequis L_1 et que $\{H_6, \ldots, H_{10}\}$ ont L_2 ainsi que L_3 comme prérequis, combien de cursus sont possibles ?

19. Un professeur de gym veut organiser un match de foot avec les 25 élèves de sa classe.

a) Combien de matchs différents pourront être organisés ?

b) Un autre jour, 4 élèves sont absents. Le pofesseur décide de faire jouer une équipe de 11 contre une équipe de 10. Combien de matchs différents pourront être joués ?

20. Parmi 10 couples mariés on doit choisir un groupe de 6 personnes qui ne doit pas contenir de couple marié.

a) Combien de possibilités y a-t-il ?

b) Combien de possibilités y a-t-il si le groupe doit contenir 3 hommes et 3 femmes ?

21. D'un jeu de 52 cartes, on tire 5 cartes sans remise. Quelle est la probabilité de tirer

a) 5 coeurs ?

b) 2 piques et 3 coeurs ?

c) 5 trèfles ou 5 coeurs ?

d) 5 cartes de la même couleur ?

e) 3 cartes d'une couleur et 2 d'une autre ?

f) les 4 as et une autre carte ?

g) 3 as et 2 coeurs ?

22. De 25 calculatrices, 5 ont un défaut. On en choisit 4 de manière aléatoire. Quelle est la probabilité qu'aucune des 4 calculatrices soit défectueuse ?

23. On possède une cage avec 35 lapins et 4 hamsters, on sort simultanément 3 animaux, quelles sont les probablitilés d'avoir

a) au moins 1 lapin ?

b) exactement 1 lapin ?

c) 3 hamsters ?

24. Un comtié de 5 personnes doit être choisi parmi 20 hommes et 5 femmes, quelle est la probabilité

a) qu'il se compose de 5 femmes ?

b) qu'il se compose de 4 hommes et 1 femme ?

25. Problèmes posés par le Chevalier de Mérée à Pascal en 1654.
    a) Quel est l'évènement le plus probable : obtenir au moins 1 fois 1 un en lançant 4 fois un dé ou obtenir au moins 1 fois 1 double un en lançant 24 fois 2 dés ?
    b) En lançant 3 fois un dé, quel est l'évènement le plus probable : obtenir une somme de 11 ou obtenir une somme de 12 ?
26. On regarde les 7 premières cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que les 7 cartes contiennent
    a) exactement 3 as ?
    b) exactement 2 rois ?
    c) exactement 3 as ou exactement 2 rois ou les deux ?
27. Vingt voitures différentes se garent dans un même parking chaque jour. Dix de ces voitures sont d'origine américaine et les dix autres d'origine européenne. Le parking comporte exactement 20 places, l'une à côté de l'autre, et les voitures se garent donc côte à côte. L'ordre dans lequel les voitures arrivent varie de jour en jour et les voitures peuvent donc se garer dans n'importe quel ordre.
    a) De combien de façons différentes les voitures peuvent-elles être garées ?
    b) Quelle est la probabilité qu'un jour les voitures sont garées en alternance, c'est-à-dire qu'il n'y a pas deux voitures américaines ni deux voitures européennes qui soient côte à côte ?
28. On tire au hasard 2 cartes d'un jeu de cartes de poker (52 cartes). Quelle est la probabilité qu'elles forment un *black jack*, ou autrement dit, que l'une soit un as et l'autre un dix, un valet, une dame ou un roi ?
29. Parmi un groupe de 3 étudiants de 1$^{\text{er}}$ bac. info., 4 étudiants de 2$^{\text{ème}}$ bac. info., 4 étudiants de 1$^{\text{er}}$ master info. et 3 étudiants de 2$^{\text{ème}}$ master info. On choisit un comité de 4 étudiants. Quelle est la probabilité que le comité contient
    a) un étudiant de chaque classe ?
    b) 2 étudiants de 2$^{\text{ème}}$ bac. info. et 2 étudiants de 1$^{\text{er}}$ master info. ?
    c) uniquement des étudiants de 2$^{\text{ème}}$ bac. info. et de 1$^{\text{er}}$ master info. ?
30. Avec un jeu de 52 cartes, quelle est la probabilité qu'une main de 5 cartes contient au moins une carte de chacune des couleurs ?

31. Un jeu de 52 cartes est distribué parmi 4 joueurs. Quelle est la probabilité que chaque joueur a un as dans sa main ?
32. Parmi les familles de 2 enfants, la moitié se trouve être bien répartie, c'est-à-dire composée d'autant de garçons que de filles. En est-il de même parmi les familles de 4 enfants ? (On suppose ici que chaque naissance donne avec équiprobabilité un garçon ou une fille.)
33. Huit tours sont placées dans des cases différentes d'un échiquier de taille 8 sur 8 où chaque emplacement a la même probabilité d'être occupé. Quelle est la probabilité que toutes les tours soient en sécurité, c'est-à-dire qu'il n'y a ni de ligne ni de colonne avec plus qu'une tour.
34. Au poker, une main est constituée de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir
    a) un flush ? (Cinq cartes d'une même couleur)
    b) une paire ?
    c) une double paire ?
    d) un brelan (trois de même valeur) ?
    e) un carré ?
35. Deux cartes sont choisies aléatoirement dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité
    a) que les deux sont des as ?
    b) qu'ils ont la même valeur ?
36. Un professeur donne 10 problèmes à ses étudiants en disant que l'examen final va être constitué de 5 de ses problèmes. Un étudiant à résolu 7 des problèmes, quelle est la probabilité qu'il réponde correctement
    a) aux 5 problèmes ?
    b) à au moins 4 des problèmes ?
37. Un groupe de 6 hommes et 6 femmes est divisé en deux groupes de 6 personnes. Quelle est la probabilité que les deux groupes ont le même nombre d'hommes ?
38. Un tiroir contient 10 paires de chaussures. Si 8 chaussures sont choisies aléatoirement, quelle est la probabilité
    a) qu'il n'y a aucune paire ?
    b) qu'il y a exactement une paire ?
39. **Le problème des anniversaires.** Soient n personnes présentes lors d'une soirée. On suppose que les 365 jours présentent la même probabilité d'être un jour d'anniversaire et on néglige les années bissextiles (personne n'est donc né un 29 février). Quelle est la probabilité que 2 personnes soient nées le même jour ?

40. Aurélie et Nicolas jouent aux dés. Ils lancent tour à tour 2 dés et observent les chiffres sortis. Quand la somme est 7 ou le produit 6, Aurélie marque un point ; quand la somme est 6 ou le produit 4, Nicolas en marque 1. Pour qui parieriez-vous ?
41. Soit un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que la 13e carte soit le premier roi distribué.
42. Joe et Jane sont deux étudiants d'une classe de 90 étudiants. Les étudiants vont être divisés en 3 classes de 30 élèves chacune. Quelle est la probabilité que Joe et Jane soient dans la même classe ?
43. Montrer que
    a) $\mathcal{C}_n = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$
    b) $\mathcal{C}_0 = 1$, $\mathcal{C}_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}\mathcal{C}_n$
44. On choisit 10 cartes dans un jeu de 52 cartes. Puis on sépare les 10 cartes en 4 tas en fonction de leur couleur.
    a) Quelle est la probabilité que le plus grand tas contient 4 cartes, le deuxième 3 cartes, le suivant 2 cartes et le plus petit 1 carte ?
    b) Quelle est la probabilité que deux tas contiennent 3 cartes, un tas contient 4 cartes et un tas vide ?
45. **Permutations avec éléments indiscernables.** Quand on permute n objets dont certains sont indiscernables, il y a des permutations qui apparaissent plusieurs fois et on trouve donc moins que $n!$ permutations distinctes.
    Par exemple, il existe 6 permutations des lettres A, B et C :
    ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, mais il n'existe que 3 permutations distinctes formées avec les lettres A, D et D : ADD, DAD, DDA.
    a) Supposons que k parmi les n objets sont indiscernables. Montrer qu'il existe alors $\frac{n!}{k!}$ permutations distinctes de ces n objets.
    b) Supposons que l'on a r types d'objets indiscernables et que pour chaque i on a k_i objets de type i.
    Montrer qu'il existe alors $\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$ permutations distinctes de ces n objets.
46. Combien d'anagrammes différents peut-on former avec le mot MISSISSIPPI ?
47. Soient 20 personnes. Quelle est la probabilité que parmi les 12 mois de l'année, 4 mois contiennent exactement 2 anniversaires et 4 contiennent exactement 3 anniversaires ?