

Introduction à la Calculabilité

Interrogation du 13 mars 2002

Livres ouverts. Durée : 1h30.

1. Il est possible de prouver que l'intervalle $[0; 1]$ de l'ensemble \mathbb{R} des réels n'est pas dénombrable. En supposant ce résultat acquis, démontrer que l'ensemble $[0; 1] \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas non plus dénombrable.
2. Soit le langage L défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ par l'expression régulière suivante :

$$((c^+ \cup \varepsilon^*)(a^*b \cup ba))^*$$

- (a) Construire un automate fini non déterministe qui accepte le langage L .
- (b) Construire un automate fini déterministe qui accepte le même langage.
- (c) Soit maintenant le langage L' généré par la grammaire régulière suivante :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow cA \mid B \\ B &\rightarrow aB \mid bS \end{aligned}$$

A-t-on $L \subset L'$, $L' \subset L$ ou $L = L'$? Justifier brièvement.

3. Soit le langage $L = \{a^n b^{2m} \mid m = n \div 3\}$ défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Pour rappel, $p \div q$ désigne le quotient de la division entière de p par q .
 - (a) Construire un automate à pile qui accepte L .
 - (b) Montrer par le théorème du gonflement que L n'est pas régulier.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit le langage $L_n = \{a^{n!} b^n\}$ défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Pour rappel, $n!$ désigne la factorielle de n .
 - (a) Si on fixe n , L_n est-il régulier? Justifier brièvement.
 - (b) Montrer que langage $L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ n'est pas hors-contexte.