Introduction à la Calculabilité

Examen d'août 1997

Livres fermés.
Durée : 3 heures 30.

Répondre à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent nom, prénom et section. Réponses brèves, concises et précises souhaitées.

1. Soit le langage L dénoté par l'expression régulière

$$(a^* \cup b)^+ a^+.$$

   (a) Donner un automate fini non déterministe acceptant L.

   (b) Donner un automate fini déterministe acceptant L.

   (c) Donner une grammaire régulière acceptant L.

2. Donner un automate à pile reconnaissant $\{a^n b^m a^p b^q | n + p = m + q\}$

3. (a) Énoncer le théorème du gonflement pour les langages hors-contexte.

   (b) Montrer que $L = \{a^{n^2} b^{n^2}\}$ n'est pas hors-contexte.

4. (a) Démontrer qu'étant donnée une grammaire hors-contexte G, il existe un algorithme pour déterminer si $L(G) = \phi$.

   (b) Déterminer si la grammaire suivante génère le langage vide.

$$\begin{array}{l} S \to A \\ A \to aS \end{array}$$

   Justifier.

5. Définir les notions de machine de Turing, de configuration et de configuration dérivable, d'exécution, de langage accepté et de langage décidé dans le cadre de ces machines.

6. Montrer que la fonction
$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} 2^{i^2}$$
est primitive récursive.

   Le caractère primitif récursif des fonctions d'addition $plus(m, n)$, de multiplication $times(m, n)$ et de puissance (m^n) $power(m, n)$ est considéré connu.

7. Déterminer s'il existe un algorithme pour vérifier si une machine de Turing donnée passe par un état donné lors de son exécution sur tout mot d'entrée.

8. (a) Définir la notion de langage NP-complet.
   (b) Énoncer le théorème de Cook.
   (c) Si l'on découvrait une solution polynomiale au problème de la couverture de sommets (*vertex cover*), quelle information concernant le problème de la programmation entière pourrait-on déduire ? Justifier.

9. (a) On considère des formules du calcul des propositions en forme normale *disjonctive*, par exemple la formule ci-dessous.
$$(p \wedge \neg q) \vee p \vee (q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg t) \vee (s \wedge t)$$
   On s'intéresse au problème de déterminer si une formule de cette forme est falsifiable, c'est-à-dire s'il existe une fonction d'interprétation qui la rende fausse. Montrer que ce problème est NP-complet.
   (b) Le même problème appliqué à des formules en forme normale *conjonctive* est-il aussi NP-complet ? Justifier.