Introduction à la Calculabilité

Examen du 31 août 2010

Livres fermés. Durée : 3h30.

Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.

1. Une *suite arithmétique définie sur les naturels* est une suite infinie de nombres naturels
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
telle que $u_0 \in \mathbb{N}$ et, pour tout autre indice $i \geq 1$, $u_i = u_{i-1} + r$, avec $r \in \mathbb{N}$ et $r \neq 0$.

   L'ensemble de toutes les suites arithmétiques définies sur les naturels est-il un ensemble dénombrable ? Justifiez rigoureusement.

2. Soit L le langage dénoté par l'expression régulière suivante :
$$((a^* \cup ab)a)^* \cup a^*c.$$
   (a) Construisez un automate fini non déterministe acceptant L.
   (b) Construisez un automate fini déterministe acceptant L.
   (c) Décrivez une grammaire régulière générant L.

3. Si L est un langage régulier fini (i.e., comprenant un nombre fini de mots), le langage
$$L^R = \{ww^R \mid w \in L\}$$
est-il toujours régulier ? Justifiez.
Rappel: Le mot w^R est le mot w inversé. Par exemple, $aabc^R = cbaa$.

4. (a) Enoncez et démontrez le théorème du gonflement pour les langages hors-contexte.
   (b) Soit L le langage défini par
$$L = \{a^i b^j c^k \mid j = \max\{i, k\} - \min\{i, k\}\}.$$
   Décrivez un automate à pile acceptant L.

5. (a) Définissez la notion de mot accepté par une machine de Turing, en ayant pris soin de préalablement décrire formellement les notions de machine de Turing, configuration et dérivation de configurations.

(b) Définissez la notion de fonction calculable par une machine de Turing.

(c) Enoncez la thèse de Turing-Church en termes de fonctions calculables par machine de Turing.

6. (a) Soit $f(x, y)$, où x et y sont des naturels, la fonction qui renvoie 1 si, parmi ses arguments x et y, l'un possède un facteur premier qui ne divise pas l'autre, et qui renvoie 0 sinon. Montrez que la fonction $f(x, y)$ est primitive récursive.
   Remarque: Il n'est pas nécessaire de démontrer le caractère primitif récursif des fonctions étudiées dans le cours théorique.

   (b) Montrez qu'il existe une représentation effective des chaînes de caractères par les nombres naturels.

7. (a) Soient G_1 et G_2 deux grammaires hors-contexte générant respectivement les langages L_1 et L_2, ceux-ci étant définis sur un même alphabet Σ. Démontrez que le problème consistant à déterminer si $L_1 \cup L_2 = \Sigma^*$ est indécidable.
   Suggestion: utilisez le problème de l'universalité d'un langage hors-contexte.

   (b) Démontrez que si un langage L est récursif ($L \in R$), alors il en est de même pour son complément $\overline{L}$.

8. (a) Définissez les notions de
      i. complexité en temps d'une machine de Turing non déterministe;
      ii. transformation polynomiale;
      iii. classe de complexité NP;
      iv. classe de complexité NPC.

   (b) Donnez (sans démonstration) un exemple de problème appartenant à la classe NPC.