

Introduction à la Calculabilité

Examen du 29 août 2008

Livres fermés. Durée : 3h30.

Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.

1. Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$ et soit L le langage des mots w construits sur l'alphabet Σ qui respectent au moins une des deux conditions suivantes :
 - w se termine par ab ;
 - chaque symbole a de w est directement suivi par une occurrence du symbole b .
 - (a) Construire un automate fini non déterministe acceptant L .
 - (b) Construire un automate fini déterministe acceptant L .
 - (c) Construire un automate fini déterministe acceptant $L \cap L'$, où L' est le langage généré par la grammaire suivante :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aS \mid bS \mid cT \mid \varepsilon \\ T &\rightarrow aT \mid bT \mid \varepsilon \end{aligned}$$

2.
 - (a) Énoncer et démontrer un théorème du gonflement pour les langages réguliers.
 - (b) Énoncer le théorème du gonflement pour les langages hors-contexte.
3.
 - (a) Construire un automate à pile acceptant le langage des mots w construits sur l'alphabet $\{a, b\}$ tels que le nombre de fois où le symbole a apparaît dans w est à la fois pair et égal au nombre de fois où le symbole b apparaît dans w .
 - (b) Donner les définitions des notions suivantes :
 - i. transitions compatibles dans un automate à pile;
 - ii. automate à pile déterministe.
4. Le problème consistant à déterminer si le langage représenté par une expression régulière est vide est-il décidable ? Si oui, décrire brièvement une procédure effective résolvant le problème. Si non, le démontrer.

5. (a) Définir formellement la notion de machine de Turing ainsi que les notions suivantes s'y rapportant : configuration, dérivation de configurations, exécution, langage accepté, langage décidé.
- (b) Donner un langage qui ne peut être décidé par aucune machine de Turing, mais tel qu'il existe une machine de Turing qui l'accepte.
6. (a) Le nombre d'arrangements de k objets parmi n , c'est-à-dire le nombre de possibilités de sélectionner k objets parmi n objets discernables lorsque l'ordre dans lequel les objets sont sélectionnés revêt de l'importance, peut être calculé par la fonction suivante :

$$A(k, n) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

La fonction $A(k, n)$ est-elle μ -récursive et/ou primitive réursive ? Justifier brièvement.

- (b) Démontrer qu'il existe des fonctions calculables qui ne sont pas primitives récurives.
7. Soient une machine de Turing M et q un de ses états. Démontrer par la technique de la réduction que le problème consistant à déterminer si la machine M s'arrête pour au moins un mot d'entrée sur l'état q est indécidable.
Suggestion : utiliser le problème de l'arrêt existentiel.
8. (a) Énoncer le théorème de Cook et expliquer son rôle dans la théorie de la NP-complétude.
- (b) Dans la démonstration du théorème de Cook, quel problème encode-t-on par une formule booléenne ?