

Introduction à la Calculabilité

Examen du 28 août 2007

Livres fermés. Durée : 3h30.

Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.

1. L'ensemble des langages hors-contexte est-il dénombrable? Justifiez.
2. (a) L'égalité suivante est-elle vérifiée? Justifiez au moyen de la théorie des automates.
$$(ab \cup a)^* a = a(ba \cup a)^*.$$
(b) Donnez une grammaire régulière qui génère le langage dénoté par l'expression régulière suivante: $(a \cup b)^* \cup c^+$, avec $c^+ = cc^*$.
(c) Soit L un langage régulier construit sur l'alphabet Σ . Décrivez brièvement les procédures effectives permettant de décider si $L = \Sigma^*$, $L = \emptyset$, et si $w \in L$ pour un mot $w \in \Sigma^*$.
(d) Décrivez brièvement deux applications possibles de la théorie des automates finis.
3. (a) Démontrez que le langage $L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0 \text{ et } i > j\}$ défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ n'est pas régulier en utilisant la deuxième version du théorème du gonflement pour les langages réguliers.
(b) Donnez une grammaire hors-contexte qui génère L .
4. (a) Énoncez le théorème du gonflement pour les langages hors-contexte.
(b) Montrez qu'il existe deux langages hors-contexte dont l'intersection n'est pas un langage hors-contexte.
(c) Donnez la définition des langages hors-contexte déterministes.
(d) Existe-t-il des langages hors-contexte qui ne sont pas hors-contexte déterministe? Justifiez brièvement.
5. (a) Donnez la définition d'une machine de Turing déterministe et d'une machine de Turing non déterministe. Précisez la nature des éléments apparaissant dans ces définitions.

- (b) Donnez une machine de Turing qui décide le langage $L = \{a^{2^n}b^n \mid n \geq 0\}$ défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Explicitez en quelques mots le rôle de chaque état de la machine construite.
6. Démontrez que la fonction *SommeCarres* qui associe à un entier n la somme des carrés des entiers de 0 à n (ex: $SommeCarres(3) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 3^2$) est primitive récursive.
7. (a) Montrez que le problème de déterminer si le langage accepté par une machine de Turing est vide est indécidable.
- (b) Soit L , un langage appartenant à la classe **R**. Le complément de L appartient-il à la classe **R**? Justifiez votre réponse.
8. (a) Définissez la notion de transformation polynomiale.
- (b) Soit X un problème et L_X un langage qui l'encode. Un résultat de complexité polynomiale pour L_X est aussi applicable à X lui-même pour autant que l'encodage soit *raisonnable*. Qu'entend-on par encodage *raisonnable*? Citez certaines pratiques à proscrire dans un encodage pour qu'il soit *raisonnable*.
- (c) Démontrez que les langages qui appartiennent à la classe de complexité NP sont décidables.