Introduction à la Calculabilité

Examen du 26 août 2004

Livres fermés. Durée : 3h30.

Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom, votre prénom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.

1. (a) Soit CF, l'ensemble des langages hors-contextes. Démontrez que l'ensemble 2^{CF} (où 2^{CF} est l'ensemble des sous-ensembles de CF) n'est pas dénombrable. Justifiez.

   (b) L'égalité suivante est-elle vérifiée? Justifiez brièvement.
   $$[(a \cup b)^* a \cup (a \cup b)^* b]^* = (a \cup b)^*$$

2. (a) Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, construisez un automate fini déterministe complet qui accepte les mots qui ne comportent pas deux occurences successives de b ainsi que les mots qui contiennent un nombre impair d'occurences de c. Explicitez la démarche que vous avez suivie pour obtenir cet automate.

   (b) Soit A, l'automate obtenu au point précédent. Le mot $w = aaabcbaababcbcb$ est-il accepté par A? Justifiez en donnant la liste des états recontrés lors de l'exécution de A sur w.

   (c) Soient L_1 et L_2, deux langages réguliers. Démontrez que les langages $L_1^R = \{w | w^R \in L_1\}$ (où w^R dénote l'inverse du mot w) et $L_1 \cap L_2$ sont réguliers.

   (d) Soient L_1 et L_2, deux langages réguliers. Donnez schématiquement une procédure effective pour tester si $L_1 \subseteq L_2$ et si $L_1 = L_2$.

3. (a) Soient l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ et le langage $L = \{a^n b^{n-k} c^{n+2k} | n > 0, k \geq 0, n > k\}$. Démontrez que L n'est pas régulier en utilisant la deuxième version du théorème du gonflement pour les langages réguliers.

   (b) Soient L_1 et L_2, deux langages hors-contexte déterministes. Les langages $L_1 \cap L_2$ et $L_1 \cup L_2$ sont-ils toujours hors-contexte déterministes?

4. (a) Soit M une machine de Turing dont les transitions déplacent toujours la tête de lecture vers la droite. Le langage accepté par M est-il régulier? Justifiez brièvement votre réponse.

   (b) Un langage accepté par un automate à pile peut-il toujours être décidé par une machine de Turing? Justifiez brièvement votre réponse.

5. (a) Donnez la définition des fonctions μ-récursives.

   (b) Démontrez que toute fonction calculable par une machine de Turing est μ-recursive.

   (c) Soit F une fonction qui prend en argument deux naturels x et y et qui renvoie x si $x < y$ et y sinon. Démontrez que F est primitive récursive. Vous pouvez utiliser toutes les fonctions primitives récursives vues au cours.

6. (a) Soit L, un langage appartenant à la classe **R**. Le complément de L appartient-il à la classe **R**? Justifiez votre réponse.

   (b) Démontrez que le problème de déterminer si le langage accepté par une machine de Turing est vide est indécidable.

7. (a) Soit X un problème et L_X un langage qui l'encode. Un résultat de complexité polynomiale pour L_X est aussi applicable à X lui-même pour autant que l'encodage soit *raisonnable*. Qu'entend-on par encodage *raisonnable*? Citez certaines pratiques à proscrire dans un encodage pour qu'il soit *raisonnable*.

   (b) La classe de complexité **NP** est-elle inclue dans la classe de décidabilité **R**. La classe **NP** est-elle inclue dans la classe **RE**?

   (c) Donnez en quelques lignes la démarche à suivre pour montrer qu'un problème est NP-complet.