Introduction à la Calculabilité

Examen du 28 août 2003

Livres fermés. Durée : 3h30.

Répondez à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent votre nom et votre section. Soyez bref et concis, mais précis.

1. L'ensemble des matrices booléennes de dimension quelconque est-il dénombrable ? Justifiez.

   Rappel : Une matrice booléenne de dimension $m \times n$ (où m et n sont deux naturels non nuls) est une matrice comportant m lignes et n colonnes dont les éléments peuvent prendre pour valeur soit 0, soit 1. Par exemple,

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   est une matrice booléenne de dimension 2×3.

2. Soit la grammaire régulière G suivante définie sur l'alphabet $\Sigma = \{a,b,c\}$:

   $$\begin{array}{rcl} S & \to & cS \mid \varepsilon \\ S & \to & S_1 \mid S_2 \\ S_1 & \to & bS_1 \mid aS \\ S_2 & \to & abS_2 \mid S. \end{array}$$

   Appelons L le langage généré par G. On demande de :

   (a) construire un automate fini non déterministe qui accepte L ;

   (b) construire un automate fini déterministe qui accepte L ;

   (c) construire un automate fini déterministe qui accepte le complément de L.

3. (a) Soit le langage L défini comme suit sur $\Sigma = \{a,b\}$:

   $$L = \{a^n a^n \mid n \geq 0\}.$$

   Ce langage L est-il régulier ? Si oui, donnez un automate fini déterministe qui accepte L. Si non, démontrez qu'il n'est pas régulier.

(b) Soit l'alphabet $\Sigma = \{(,),p,q,\wedge,\vee\}$. Afin de réaliser un évaluateur de formules propositionnelles booléennes positives à deux variables, on définit sur Σ la grammaire hors-contexte G suivante :

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & p \mid q \mid C \mid D \\ C & \rightarrow & (S \wedge S) \\ D & \rightarrow & (S \vee S). \end{array}$$

Démontrez que le langage généré par cette grammaire G n'est pas régulier ; énoncez de façon précise les théorèmes utilisés.

4. Démontrez formellement que si L_R est un langage régulier et que si L_2 est hors-contexte, alors l'intersection de L_R avec L_2 est également hors-contexte.

5. (a) Dans le cadre des fonctions récursives, définissez :

   i. la minimisation non bornée ;

   ii. la notion de prédicat sûr ;

   iii. la classe des fonctions $\mu-$récursives.

   (b) Montrez que toute fonction calculable par une machine de Turing est $\mu-$récursive.

6. Un « état inutile » dans une machine de Turing est un état dans lequel la machine ne passe jamais, quelque soit son mot d'entrée. Soient une machine de Turing M et un état e de cette machine M. Démontrez que le problème consistant à tester si l'état e est inutile dans M est indécidable.

   Suggestion : Réduction à partir du problème du langage accepté vide.

7. (a) Définissez le problème 3-SAT.

   (b) Définissez le problème VC (*Vertex Cover*).

   (c) Montrez que VC est NP-complet.