Introduction à la Calculabilité

Examen de janvier 1998

Livres fermés.
Durée : 3 heures 30 minutes.

Répondre à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent nom, prénom et section. Réponses brèves, concises et précises souhaitées.

1. (a) Démontrer qu'un langage est régulier si et seulement si il est accepté par un automate fini.

   (b) Donner une grammaire régulière générant le langage défini par l'expression régulière suivante. Donner également un automate déterministe acceptant ce langage.

$$(a(b \cup c^*))^*$$

2. (a) Énoncer les deux versions du théorème du gonflement pour les langages réguliers.

   (b) Démontrer que le langage $\{a^m b^n | m = n^2\}$ n'est pas régulier.

   (c) En utilisant la notion d'automate fini, démontrer que si L_1 et L_2 sont des langages réguliers, $L_1 \cap L_2$ est aussi un langage régulier.

3. (a) Dans le cadre des automates à pile non déterministes, définir les notions de configuration, dérivation en une étape, en plusieurs étapes, d'exécution sur un mot w et de langage accepté.

   (b) Soit le langage $L = \{a^n b^m | n \neq m\}$. Montrer que L est un langage hors-contexte.

   (c) Établir un tableau comparatif des propriétés de fermeture concernant l'union, l'intersection et la complémentation pour les langages hors-contextes et les langages déterministes hors-contextes.

4. (a) Définir les notions de langage accepté et de langage décidé par une machine de Turing.

   (b) Décrire une machine de Turing calculant la fonction $f(x) = 2x$,
   x étant représenté en binaire et ayant son bit de poids le plus faible se trouvant dans la première case du ruban de la machine de Turing.

5. (a) Définir les notions de fonctions et de prédicats μ-récursifs.
   (b) Montrer que le prédicat $CarreParfait(x)$ qui est vrai si et seulement si x est un carré parfait est un prédicat primitif récursif.

6. (a) Démontrer que pour tout langage L, si L et $\bar{L}$ sont dans la classe RE, alors L et $\bar{L}$ sont dans la classe R.
   (b) Soit M une machine de Turing. Montrer que le problème de déterminer si le langage accepté par M est hors-contexte est indécidable.

7. (a) Définir les notions de machine de Turing polynomiale, transformation polynomiale, classes P, NP, NPC.
   (b) Démontrer que le problème de la *couverture de sommet (vertex cover)* est un problème NP-complet. Pour rappel, ce problème a pour données un graphe et une constante j. Il consiste à déterminer s'il existe un sous-ensemble des sommets du graphe de taille au plus j qui *couvre* tous les arcs du graphe, à savoir tel que chaque arc a au moins une de ses extrémités dans l'ensemble.
   (c) À l'aide d'un diagramme, représenter les relations d'inclusion existant entre les classes P, NP, NPC, EXPTIME, R, RE, les langages réguliers et les langages hors-contextes.