

Introduction à la Calculabilité

Examen de janvier 1997

Livres fermés.

Durée : 3 heures 30 minutes.

*Répondre à chaque question sur une feuille séparée sur laquelle figurent nom, prénom et section. Réponses brèves, concises et précises souhaitées. Les questions précédées de * sont légèrement plus difficiles que les autres, elles ne nécessitent pas une réponse très longue, mais un peu de réflexion.*

1. (a) Dans le cadre des automates finis déterministes, définir les notions de configuration, dérivation en une étape, en plusieurs étapes, d'exécution sur un mot w , de langage accepté et la notion d'équivalence entre deux automates.
- (b) Donner une grammaire régulière générant le langage défini par l'expression régulière suivante. Donner également un automate déterministe l'acceptant.

$$(a \cup b)^*bd.$$

2. (a) Énoncer et démontrer la deuxième version du théorème du gonflement pour les langages réguliers.
- (b) Démontrer que le langage $\{a^m b^n \mid m^2 < n\}$ n'est pas régulier.
3. (a) Définir la notion d'automate à pile.
- (b) Donner un automate à pile acceptant le langage des mots de la forme $(a \cup b)^*c(a \cup b)^*$ où le nombre total de a égale le nombre total de b .
- (c) Montrer comment ramener une grammaire hors-contexte à une grammaire dont toutes les règles ont une des deux formes suivantes :
 - $A \rightarrow \sigma$ où σ désigne un symbole terminal;
 - $A \rightarrow v$ où $|v| \geq 2$.

Utiliser cette transformation pour montrer que le problème de l'appartenance d'un mot au langage généré par une grammaire hors-contexte est décidable.

.../...

4. (a) Montrer que la fonction $racine(a)$ qui renvoie la partie entière de la racine de a (c.-à-d. le plus grand naturel i tel que $i^2 \leq a$) est primitive réursive.
 - (b) Pourquoi introduit-on la notion de prédicats sûrs dans la définition des fonctions μ -récurives ?
5. (a) Utiliser la technique de la diagonalisation pour montrer l'existence d'au moins un problème indécidable.
 - (b) La classe HC des langages hors-contexte est-elle incluse dans R ? Dans RE ? Dans P ? Dans NP ? Justifier.
 - * (c) Les langages générés par les grammaires de type 1 (les langages sensibles au contexte) sont acceptés par des automates à borne linéaire. Une machine de Turing est un automate à borne linéaire s'il existe des constantes k_1 et k_2 telles que, lors de toute exécution sur un mot d'entrée w , la machine n'utilise jamais plus de $k_1|w| + k_2$ cases de son ruban. Montrer que les langages sensibles au contexte sont décidables.
 - (d) Un langage qui possède une procédure effective permettant d'en énumérer les éléments est-il décidable ? Justifier.
6. (a) Définir la notion de transformation polynomiale et de classe d'équivalence polynomiale.
 - (b) Montrer que tout problème NP-complet peut être résolu en un temps $\mathcal{O}(2^{p(n)})$ où $p(n)$ désigne un polynôme.
 - * (c) Soit
 - un ensemble de m paires (\bar{v}_i, d_i) où chaque \bar{v}_i est un vecteur d'entiers de taille n et chaque d_i est un entier,
 - un vecteur \bar{d} de taille n ,
 - une constante b .

Le problème de la programmation entière consiste à déterminer s'il existe un vecteur d'entiers \bar{x} de taille n

- tel que $\bar{x} \cdot \bar{v}_i \leq d_i$ pour $1 \leq i \leq m$
- et que $\bar{x} \cdot \bar{d} \geq b$.

Montrer que le problème de la programmation entière est NP-dur.