INTRODUCTION À LA THÉORIE DE L'INFORMATIQUE

ANNÉE ACADÉMIQUE 2013-2014
RÉPÉTITION 1

Techniques de preuves.

(1) *(Implication directe)*
  (a) Soit $a \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n \in \mathbb{Z}$ est un multiple de a, alors n^2 aussi.
  (b) **En déduire** que si $n \in \mathbb{Z}$ est impair, alors $n^2 + 1$ est pair.

(2) *(Preuve par cas)*
On dispose d'une balance manuelle (pas de graduation, juste une flèche et deux plateaux).
  (a) Parmi 3 pièces apparemment identiques, se cache une pièce fausse remarquablement imitée. On sait seulement qu'elle est un peu plus lourde que les vraies... Montrer qu'il est possible de déterminer la fausse pièce en seulement 1 pesée.
  (b) Parmi 8 pièces apparemment identiques, se cache une pièce fausse remarquablement imitée. On sait seulement qu'elle est un peu plus lourde que les vraies... Montrer qu'il est possible de déterminer la fausse pièce en seulement 2 pesées.

(3) *(Preuve par cas)*
Soit p, q, r des propositions. Montrer au moyen d'une étude de cas que la déduction suivante est valide.

$$\frac{p \vee q, \neg r \vee \neg q}{p \vee \neg r}$$

(4) *(Preuve par induction)* Montrer en utilisant le Principe de preuve par induction que le nombre de sous-ensembles distincts d'un ensemble de n éléments est 2^n.

(5) *(Preuve par induction)*
  (a) Montrer que pour tout nombre naturel $n > 3$, on a $2^n < n!$.
  (b) Montrer que pour tout nombre naturel $n \geqslant 5$, on a $n^2 < 2^n$.

(6) *(Preuve par induction)*
  (a) Montrer que pour tout nombre naturel n, le nombre $8^n - 2^n$ est divisible par 6.

(7) *(Preuve par induction forte)*
Montrer que quels que soient les nombres entiers $x_1, x_2, ..., x_n$ ($n \geqslant 1$) et quel que soit l'ordre dans lequel on place les parenthèses dans leur produit, le nombre d'opérations à effectuer pour calculer ce produit vaut toujours $n - 1$.

(8) *(Preuve par induction forte)*
Montrer que si on prend le Principe de preuve par induction forte comme un axiome, alors on peut démontrer le Principe du bon ordre.

(9) *(Démonstration via le Principe du bon ordre)*
Un « tournoi toutes rondes » (“round-robin tournament” en anglais) simple est un type de tournoi dans lequel les participants se rencontrent tous exactement une fois.

On dit que des joueurs $p_1, p_2, ..., p_m$ forment un cycle si p_1 bat p_2, p_2 bat p_3, ..., p_{m-1} bat p_m et p_m bat p_1. En utilisant le Principe du bon ordre, montrer que s'il existe un cycle de m joueurs avec $m \geqslant 3$ dans un tournoi toutes rondes simple, alors il existe un cycle de longueur 3 parmi les joueurs de ce cycle.

Preuves erronées.

(1) *(Preuve erronée)*
Trouver l'erreur dans la démonstration suivante de $1/8 > 1/4$.

Démonstration. En utilisant les propriétés de la fonction $\log_{10}$, on a

$$\begin{aligned} 3 > 2 \quad &\Rightarrow \quad 3.\log_{10}(1/2) > 2.\log_{10}(1/2) \\ &\Rightarrow \quad \log_{10}\left((1/2)^3\right) > \log_{10}\left((1/2)^2\right) \\ &\Rightarrow \quad (1/2)^3 > (1/2)^2 \\ &\Rightarrow \quad 1/8 > 1/4\ . \end{aligned}$$

□

(2) *(Preuve erronée)*
Trouver l'erreur dans la démonstration suivante du fait que tous les entiers strictement positifs sont égaux.

Démonstration. On doit montrer qu'étant donné A et B deux entiers strictement positifs, on a toujours $A = B$. Pour ce faire, il suffit (justifier !) de montrer que

$$P(N) = ((MAX(A, B) = N) \Rightarrow (A = B))$$

est vérifié pour tout $N > 0$.

On procède par induction. Si $N = 1$, alors puisque A et $B > 0$ sont strictement positifs, l'égalité $MAX(A, B) = 1$ assure que $A = B = 1$.

On suppose maintenant $P(N)$ vrai pour un $N \geqslant 1$. On va montrer qu'alors $P(N+1)$ est vrai. Soient A et B avec $MAX(A, B) = N+1$. Alors $MAX((A-1), (B-1)) = N$ et on en déduit que $(A-1) = (B-1)$ en utilisant l'hypothèse d'induction $P(N)$. En ajoutant 1 aux deux membres de cette dernière égalité, on trouve $A = B$. □