Introduction à la théorie de l'informatique

Répétition 10

Année académique 2012-2013

1. On décide de placer 1.000 euros sur un compte bancaire. A la fin de chaque mois, on gagne 1% d'intérêt et on retire immédiatement 5 euros. Soit M_n la somme d'argent se trouvant sur le compte après n mois. En utilisant la méthode "Plug-and-Chug", trouvez une solution analytique pour M_n.

2. Soit le langage RecMatch $\subset \{[,]\}^*$ défini récursivement comme suit :
   - La chaîne vide $\lambda \in$ RecMatch ;
   - Si s et t sont dans RecMatch, alors $[s]t$ aussi.

   La longueur d'un élément s de RecMatch est le nombre de crochets gauches et droits dans s. Soit c_n le nombre d'éléments s dans RecMatch de longueur n. Exprimer c_n sous la forme d'une récurrence (sans la résoudre) et vérifier que $c_n = 0$ dès que n est impair.

3. Trouvez une solution analytique exacte pour les récurrences suivantes :
   (a) • $u_0 = 2$
       • $u_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} u_{n-1-p}u_p$ pour $n > 0$

   (b) • $a_1 = 1$
       • $na_n = (n-2)a_{n-1} + 2$ pour $n > 1$

   (c) • $x_1 = 1$
       • $x_2 = 1$
       • $x_n = \dfrac{x_{n-1}.x_{n-2}}{x_{n-1} + x_{n-2}}$ (avec $n > 2$)

       (Votre solution pourra faire intervenir les nombres de Fibonacci)

4. Soit la récurrence :
   - $T(1) = 0$
   - $T(n) = 6T(n/3) + 2n$ (où $n > 1$ est une puissance de 3).

   (a) Sans résoudre la récurrence, montrez que $T(n) = O(n^2)$.

(b) Trouvez une solution analytique exacte à la récurrence.

(c) Vérifier que votre solution satisfait à la borne obtenue par le master theorem.