INTRODUCTION À LA THÉORIE DE L'INFORMATIQUE

ANNÉE ACADÉMIQUE 2012-2013
RÉPÉTITION 2

Machines d'états.

(1) Montrer que l'algorithme de **calcul du pgcd** figurant sur le transparent 91 du cours théorique est totalement correct pour les précondition et postcondition suivantes :
$\text{Pre}((x;y)) = $ "$x > 0$ et $y > 0$" ;
$\text{Post}((x;y)) = $ "x est le plus grand commun diviseur de a et b".

(2) Soit un **robot se déplaçant** sur une grille entière à deux dimensions. L'état du **robot** est spécifié par les coordonnées entières $(x;y)$ représentant sa position courante sur la grille. Le robot se trouve initialement à l'origine. À chaque pas, le robot a le choix entre ces 4 types de pas :

$$(+2;-1)\ ,\quad (+1;-2)\ ,\quad (+1;+1)\ ,\quad (-3;0).$$

(a) Modéliser ce problème par une machine d'état.

(b) Déterminer si le robot peut atteindre l'état $(0;2)$. Dans l'affirmative, donner une suite de déplacements menant à $(0;2)$. Dans la négative, donner une preuve utilisant le théorème d'invariant.

(3) D'après la rumeur, la procédure ci-dessous permet de **multiplier incognito** deux naturels quelconques de façon efficace.

```
procedure multiply(x, y: nonnegative integers)
r := x;
s := y;
a := 0;
while s ≠ 0 do
    if 3 | s then
        r := r + r + r;
        s := s/3;
    else if 3 | (s − 1) then
        a := a + r;
        r := r + r + r;
        s := (s − 1)/3;
    else
        a := a + r + r;
        r := r + r + r;
        s := (s − 2)/3;
return a;
```

(a) Modéliser ce problème par une machine d'état.

(b) En utilisant le théorème d'invariant, montrer que l'algorithme est partiellement correct pour les précondition et postcondition suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Pre}((x\,;\,y)) &= \text{“}x, y \in \mathbb{N}\,;\text{”} \\ \text{Post}((x\,;y)) &= \text{“}a = x.y\text{”.”} \end{aligned}$$

(c) Montrer que l'algorithme se termine toujours après au plus $\log_3(y) + 1$ exécutions du corps de la boucle.