Coloriage de graphes

Problème : l'apparitorat de la faculté doit mettre au point l'horaire des examens de la session de juin.

Contraintes :

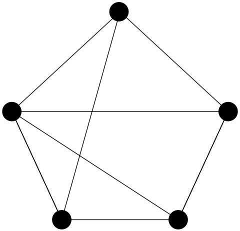
- Un étudiant ne peut pas participer à deux examens en même temps.
- La période d'examens doit être la plus courte possible.

Question : De quelle manière la théorie des graphes peut-elle nous aider à modéliser ce problème ?

Solution : Soit un graphe avec

- un sommet par cours,
- une arête entre deux sommets si au moins un des étudiants suit les deux cours.

Exemple :

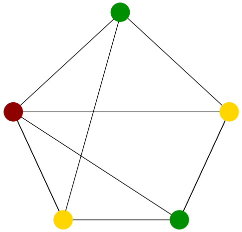


Associons une couleur à chaque plage horaire :

- lundi matin
- lundi après-midi
- mardi matin
- ...

Il est possible d'organiser l'examen sur *n plages horaires* si et seulement si il est possible de *colorier* les sommets du graphe à l'aide de *n couleurs* de telle manière que pour toute paire de sommets adjacents, ces sommets soient coloriés différemment.

Exemple :



Autres applications : allocation de registres, allocation de fréquences de station radio, coloriage de cartes...

k-coloriages

Définition : Un graphe G est *k-coloriable* s'il existe un ensemble C de k couleurs tel que chaque sommet puisse être colorié avec une couleur $c \in C$ sans que deux sommets adjacents ne partagent la même couleur.

Remarque : Tout graphe k-coloriable est nécessairement $(k+1)$-coloriable.

Définition : Le *nombre chromatique* $\chi(G)$ d'un graphe G est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier le graphe G.

Un graphe est k-coloriable ssi $\chi(G) \leq k$.

Théorème : Soit $k \in \mathbb{N}_0$, et soit G un graphe dont chaque sommet est au plus de degré k. Le graphe G est $(k+1)$-coloriable.

Démonstration :

- La démonstration fonctionne par induction sur le nombre n de sommets de G.
- Soit $P(n) =$ "Tout graphe à n sommets de degrés au plus égaux à k est $(k+1)$-coloriable".
- *Cas de base :* $P(1)$ est vrai, car tout graphe à 1 sommet est 1-coloriable.

- *Cas inductif :* Supposons que $P(n)$ soit vrai.
  - Soit G un graphe à $n + 1$ sommets, chacun de degré au plus égal à k.
  - Retirons de G un sommet v arbitraire, ainsi que ses arêtes incidentes. Soit G' le graphe résultant.
  - G' est $(k + 1)$-coloriable.
  - Ajoutons le sommet v et ses arêtes incidentes.
  - Le degré de v est au plus égal à k, et $k + 1$ couleurs sont disponibles.
  - Associons à v une couleur différente de tous ses sommets adjacents.
  - G est donc $(k + 1)$-coloriable.
- Par induction, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

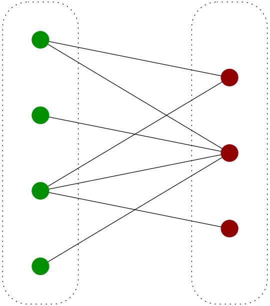
Graphes bipartis

Définition : Un graphe *biparti* est un graphe dont les sommets peuvent être divisés en deux sous-ensembles disjoints $L(G)$ et $R(G)$ tels que toute arête a une extrémité dans $L(G)$ et l'autre extrémité dans $R(G)$.

Lemme : Un graphe G est *biparti* ssi il est 2-coloriable.

Propriété : Soit G un graphe biparti. Si deux sommets u, v de G sont adjacents, alors dans tout 2-coloriage de G, un des deux sommets sera colorié avec une couleur, et l'autre sommet sera colorié avec la couleur restante.

Tout graphe biparti peut donc être représenté d'une façon similaire à la suivante :

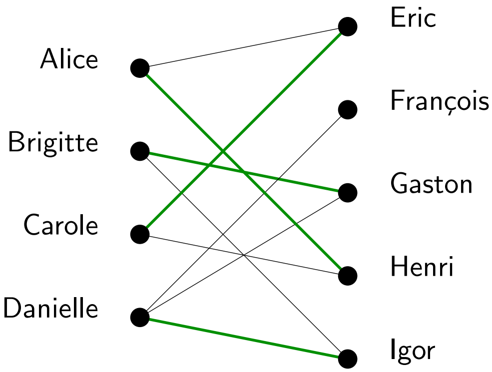


Théorème : Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

Théorème de Hall

Données : Une groupe contient un certain nombre de filles et de garçons. Chaque fille aime certains garçons.

Problème : Sous quelles conditions chaque fille peut-elle être mariée à un garçon qu'elle aime ?



Définition : L'*ensemble des garçons aimés par un ensemble de filles* est l'ensemble des garçons aimés par au moins une de ces filles.

Condition de mariage : *Tout sous-ensemble des filles aime au moins un ensemble de garçons aussi grand.*

Exemple : Il est impossible de trouver une correspondance si un ensemble de 4 filles aime un ensemble composé de seulement 3 garçons.

Théorème : Il est possible de trouver une correspondance entre un ensemble F de filles et un ensemble G de garçons si et seulement si la condition de mariage est satisfaite.

Démonstration :

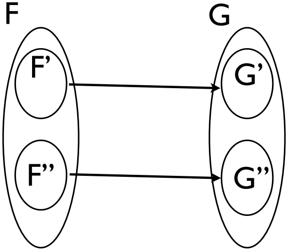
$\boxed{\Rightarrow}$

- Considérons une correspondance possible.
- Soit F' un sous-ensemble quelconque de F.
- Chaque fille $f \in F'$ aime au moins le garçon avec lequel elle est mariée.
- Donc, la condition de mariage est satisfaite.

$\boxed{\Leftarrow}$

- Supposons que la condition de mariage soit satisfaite, et montrons qu'il existe une correspondance.
- La démonstration fonctionne par induction forte sur $|F|$.
- *Cas de base :* Si $|F| = 1$, une correspondance existe.
- *Cas inductif :* Supposons $|F| \geq 2$. Deux cas possibles :
  - Tout sous-ensemble propre des filles aime un ensemble de garçons *strictement plus grand*.
    - Dans ce cas, on peut marier une fille quelconque avec un garçon qu'elle aime.
    - La condition de mariage est satisfaite pour les personnes restantes.
    - On peut trouver une correspondance par induction.

- Il existe un ensemble de filles $F' \subset F$ qui aime un ensemble de garçons $G' \subseteq G$ tel que $|G'| = |F'|$.
  - On peut marier les filles de F' avec les garçons de G' par induction.
  - Montrons que la condition de mariage est satisfaite pour les garçons et filles restantes.
  - Soit un sous-ensemble quelconque $F'' \subseteq (F \setminus F')$. Soit G'' l'ensemble des garçons de $G \setminus G'$ aimés par F''.
  - Il faut montrer que $|F''| \leq |G''|$.
  - Comme $F' \cup F''$ aime $G' \cup G''$, on a $|F' \cup F''| \leq |G' \cup G''|$.
  - Comme $|F'| = |G'|$, on a $|F''| \leq |G''|$. $\square$



Un énoncé formel

Définition : Soit S un sous-ensemble des sommets d'un graphe. $N(S)$ est défini par le nombre de sommets n'appartenant pas à S, mais adjacents à au moins un sommet de S.

Théorème : Soit $G = (L \cup R, E)$ un graphe biparti tel que toute arête a une extrémité dans L et l'autre extrémité dans R. Il existe une correspondance pour les sommets de L si et seulement si $|S| \leq |N(S)|$ pour tout $S \subseteq L$.

Problème des mariages stables

Données : Un groupe contient un nombre identique N d'hommes et de femmes. Chacun des hommes et des femmes détermine un ordre de préférence sur les personnes de sexe opposé.

Homme	Préférence
1	A B C
2	A C B
3	C A B

Femme	Préférence
A	3 1 2
B	3 2 1
C	1 2 3

Problème : Marier les hommes et les femmes de manière à satisfaire *au mieux* les préférences de chacun.

Problème des mariages stables

Définitions : Un ensemble de mariages est *instable* s'il y a un homme et une femme qui se préfèrent à leurs époux respectifs. On appelle un tel couple un couple *fripon*. Un ensemble de mariages est stable s'il ne contient pas de couple fripon.

Exemple : Si 1 est marié à A, 3 à C et 2 à B, alors 2 et C forment un couple fripon et donc l'ensemble de mariages est instable.

Reformulation du problème : Marier tous les hommes et femmes de manière à obtenir un ensemble de mariages stable.

Notes :

- Problème défini en 1962 par Gale et Shapley.
- De nombreuses variantes existent
- Applications nombreuses : assignation des internes à des hopitaux, agences de rencontres, assignation de trafic sur des serveurs...

Un algorithme

Solution : Répéter le processus suivant :

- Chaque homme se présente à la femme en tête de sa liste de préférence courante (si cette liste est non vide).
- Chaque femme demande à être retirée de la liste de tous les hommes qui se présentent à elle excepté leur favori parmi ceux-ci.

L'itération s'arrête lorsque chaque femme a au plus un homme qui se présente à elle et c'est avec cet homme qu'elle se marie.

Exemple : Sur le problème précédent, on arrive à l'ensemble de mariage $\{1-B, 2-C, 3-A\}$

Montrons que cet algorithme :

- se termine
- est partiellement correct : S'il se termine, tous les hommes et femmes sont en couple et l'ensemble des mariages obtenu est stable

Terminaison

Théorème : L'algorithme se termine après au plus N^2 itérations.

Démonstration : Soit la somme f des tailles des listes de préférences des hommes. On a :

- $f \in \mathbb{N}$.
- Initialement, f est égale à N^2.
- A chaque itération, au moins un homme supprime une femme de sa liste (et aucun n'ajoute de femme dans sa liste). f est donc strictement décroissante.

Par le théorème du transparent 103, on en conclut que l'algorithme se termine après au plus N^2 itérations.

$\square$

Correction partielle

Définition : Soit P le prédicat : pour toute femme w et tout homme m, si w a été supprimée de la liste de m, alors w a un prétendant qu'elle préfère à m.

Lemme : P est un invariant de l'algorithme du transparent 268.

Démonstration : Par induction sur le nombre d'itérations.
Cas de base : Initialement, aucune femme n'a été supprimée des listes de préférences des hommes. Le prédicat est donc vrai.
Cas inductif : Supposons P vérifié après d itérations et soit une femme w supprimée de la liste de m après l'itération $d + 1$. Deux cas possibles :

- Cas 1 : w a été supprimée à l'itération $d + 1$. Alors, w a un prétendant qu'elle a préféré à m à l'itération $d + 1$.
- Cas 2 : w a été supprimée avant l'itération $d + 1$. Puisque P est vrai après l'itération d, w a un prétendant qu'elle préfère à m après l'itération d. Elle a donc le même prétendant ou un meilleur après l'itération $d + 1$.

Dans les deux cas, P est vrai après l'itération $d + 1$ et est donc un invariant de l'algorithme. $\square$

Correction partielle

Théorème : Tous les hommes et les femmes sont en couple lorsque l'algorithme se termine.

Démonstration :

- La démonstration fonctionne par contradiction.
- Supposons qu'une personne ne soit pas mariée.
- Vu qu'il y a autant d'hommes que de femmes et qu'un mariage implique exactement un homme et une femme, il y a au moins un homme, m, et une femme, w, qui ne sont pas mariés.
- Puisque m n'est pas marié, sa liste doit être vide. Par l'invariant, chaque femme a donc un prétendant qu'elle préfère à m.
- Comme l'algorithme s'est terminé, chaque femme a du être mariée à ce prétendant, ce qui contredit le fait que w n'est pas mariée.

$\square$

Correction partielle

Théorème : L'algorithme produit un ensemble de mariages stable.

Démonstration : Soit un homme m et une femme w qui ne sont *pas* mariés l'un à l'autre en sortie de l'algorithme. Montrons que m et w ne forment pas une couple fripon. Il y a deux cas possibles :

- w n'est pas sur la liste de m. Par l'invariant, w a un prétendant (qui est son mari) qu'elle préfère à m et donc ils ne forment pas un couple fripon.
- w est sur la liste de m. Puisque m n'est pas marié à w, il s'est présenté (seul) face à une autre femme qu'il préfère donc à w.

□

Corrolaire : Quelles que soient les préférences, il est toujours possible de trouver un ensemble de mariages stable.

Equité

L'algorithme est-il équitable ? Non !

Définitions :

- Etant donné des listes de préférences, une personne p_1 est un partenaire possible de p_2 s'il existe un ensemble stable de mariages où p_1 et p_2 sont mariés.
- Le partenaire *optimal* d'une personne est celui qu'elle préfère parmi ses partenaires possibles. Son *pire* partenaire est celui qu'elle aime le moins parmi tous les partenaire possibles.

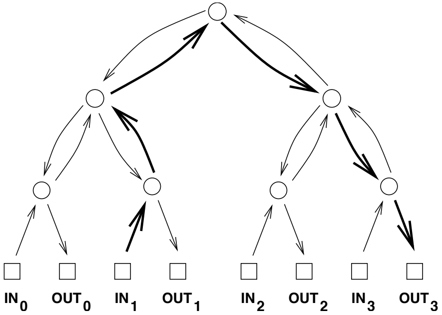
Théorème : L'algorithme du transparent 268 marie tous les hommes à leur partenaire optimale et toutes les femmes à leur pire partenaire.

Démonstration : Le preuve fonctionne par contradiction. Laissée à titre d'exercice.

Réseaux de communication

On souhaite envoyer des paquets sur un réseau informatique entre des nœuds d'entrée et des nœuds de sortie (ordinateurs, téléphones, etc.) connectés entre eux par des commutateurs ("switches") chargés de dispatcher les paquets sur le réseau.

Le réseau peut être représenté par un graphe dirigé.



Réseaux de communications

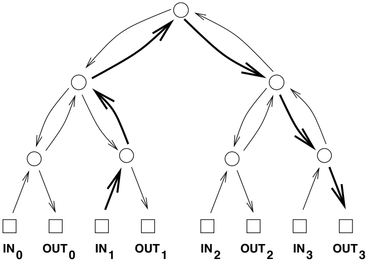
Hypothèses de travail :

- Les paquets transmis entre nœuds sont de taille constante
- La transmission d'un paquet sur un lien se fait en un temps constant, indépendant du lien
- Il y a exactement autant de nœuds d'entrée que de nœuds de sortie et chaque nœud d'entrée cherche à transmettre un paquet à un nœud de sortie distinct.
- Le nombre de nœuds est une puissance exacte de 2.

Objectif : on cherche à mettre au point un réseau de manière à minimiser :

- Le nombre de commutateurs et leur taille (nombre d'entrées et de sorties)
- Le diamètre du réseau
- Les congestions (le nombre de paquets passant par un même commutateur

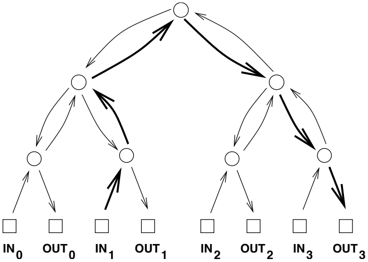
Nombre et taille des commutateurs



Taille maximale des commutateurs : 3×3 (3 entrées, 3 sorties)

Nombre de commutateurs : $2N - 1$ (pour N nœuds d'entrée)

Diamètre



Définition : Le diamètre d'un réseau de communication est défini comme la longueur maximale d'un plus court chemin entre une entrée et une sortie.

Exemple : Dans l'exemple, cette distance correspond à la distance entre l'entrée 0 et la sortie 3, c'est-à-dire 6. En général, le diamètre d'un arbre binaire complet à N entrées/sorties est $2\log_2 N + 2$

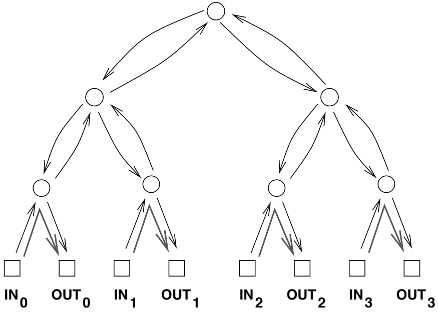
Routage

Définitions :

- Un problème de *routage* est défini par une permutation $\pi : \{1, \dots, N\} \to \{1, \dots, N\}$ des nœuds, où $\pi(i)$ est le nœud de sortie auquel le nœud i souhaite envoyer un paquet.
- Un *routage* P, solution d'un problème de routage π, est un ensemble de parcours P_i de chaque entrée i vers sa sortie $\pi(i)$.

Exemple :

- Soit le problème de routage $\pi(i) = i$ pour l'arbre binaire complet.
- Un routage possible est obtenu en prenant comme parcours P_i le chemin de l'entrée i vers la sortie i passant directement pas le commutateur qui les relie.

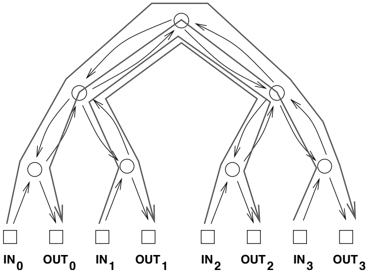


Congestion

Définition :

- La *congestion* d'un routage P est le nombre maximum de parcours dans P qui traversent un même commutateur.
- Etant donné une permutation π, un routage est optimal par rapport aux congestions s'il minimise la congestion parmi tous les routages qui résolvent π.
- La *congestion d'un réseau* est la congestion maximale sur toutes les routages optimaux.

Exemple : Dans le cas de l'arbre binaire complet, la congestion maximale est N, qui correspond à $\pi(i) = (N-1) - i$.

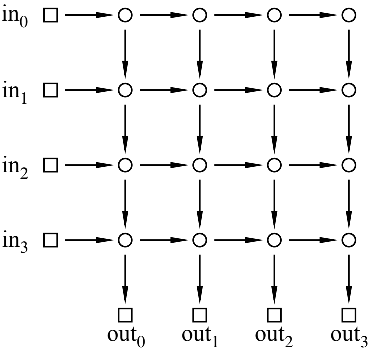


Synthèse sur les arbres binaires complets

Réseau	Diamètre	Taille commut.	#commut.	congestion
Arbre binaire complet	$2\log_2 N + 2$	3×3	$2N - 1$	N

- Le nombre de commutateurs est proche de l'optimum étant donné leur taille. Le diamètre est bon également.
- On ne peut pas faire pire en matière de congestion.

Tableau à deux dimensions



Nombre et taille des commutateurs : N^2 commutateurs de taille 2×2

Diamètre : $2N$

Tableau à deux dimensions

Théorème : La congestion d'un tableau à N entrées est 2.

Démonstration :

Montrons d'abord que la congestion est au plus 2 :

- Soit π une permutation. Une solution P pour π est l'ensemble des chemins P_i où P_i se déplace à droite à partir de l'entrée i jusqu'à la colonne $\pi(i)$ et puis descend jusqu'à la sortie $\pi(i)$.
- Le commutateur à la ligne i et la colonne j transmet au plus 2 paquets : celui qui vient de l'entrée i et celui qui va vers la sortie j.

Montrons que la congestion est au moins 2 :

- Quel que soit π tel que $\pi(0) = 0$ et $\pi(N-1) = N-1$ deux paquets doivent passer par le commutateur en bas à gauche

□

Tableau à deux dimensions

Réseau	Diamètre	Taille commut.	#commut.	congestion
Arbre binaire complet	$2\log_2 N + 2$	3×3	$2N - 1$	N
Tableau à 2 dim.	$2N$	2×2	N^2	2

- La congestion est minimale
- Le nombre de commutateurs est prohibitif

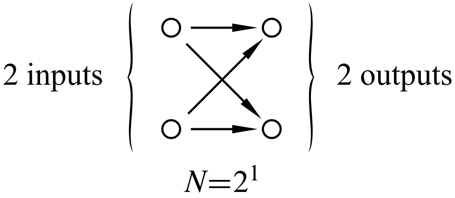
Peut-on faire mieux que ces deux réseaux ?

Réseau de Benés

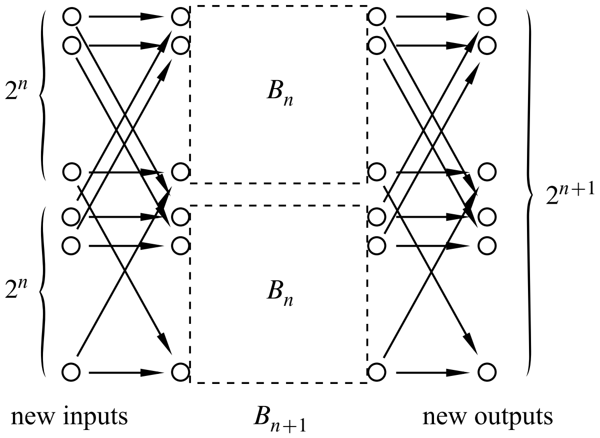
Le réseau de Benés est bon selon tous les critères.

B_n est le réseau de Benés avec $N = 2^n$ entrées et sorties. On le définit de manière récursive :

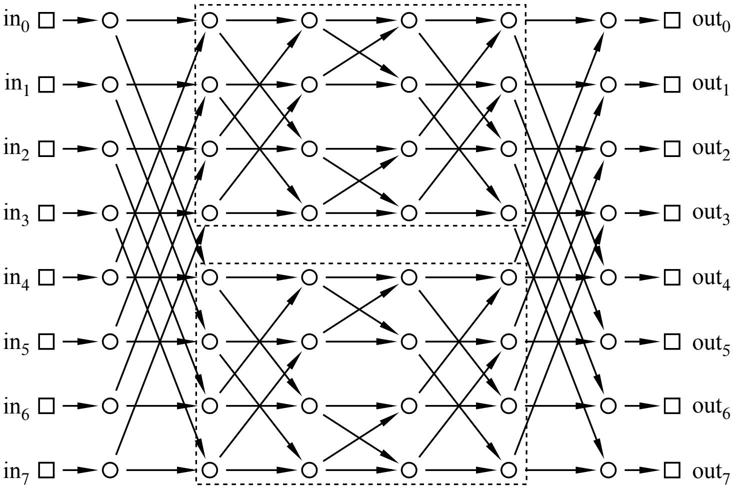
- Cas de base : B_0 est donné par :



- Cas récursif : B_{n+1}



Exemple : B_3



in0
in1
in2
in3
in4
in5
in6
in7
out0
out1
out2
out3
out4
out5
out6
out7

Propriétés : commutateurs et diamètre

Le nombre de commutateurs (2×2) pour N entrées, $C(N)$, est donné par :

$$C(N) = \begin{cases} 4 & \text{si } N = 2, \\ 2C(N/2) + 2N & \text{si } N > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(N) = 2N \log_2 N$$

Diamètre :

- Tous les chemins entre entrées et sorties ont la même longueur donnée par $L(N) + 2$ où :

$$L(N) = \begin{cases} 1 & \text{si } N = 2, \\ L(N/2) + 2 & \text{si } N > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L(N) = 2 \log_2 N - 1$$

- Le diamètre est $2 \log_2 N + 1$.

(Exercice : prouvez les formes analytiques de $C(N)$ et $L(N)$ par induction)

Propriété : congestion

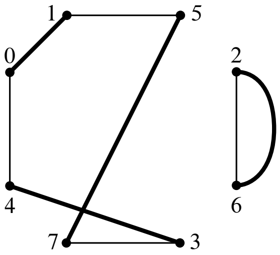
Théorème : La congestion du réseau B_n est 1.

Démonstration : La preuve fonctionne par induction sur n où $N = 2^n$.
$P(n) =$"la congestion de B_n est 1".
Cas de base ($n = 1$) : Etant donné B_1, il n'y a qu'un seul routage et sa congestion est 1.
Cas inductif : Supposons que la congestion de B_n soit 1 et montrons que la congestion de B_{n+1} est aussi 1.
Soit π une permutation arbitraire de $\{0, 1, \ldots, N-1\}$. Soit G le graphe dont les sommets sont les numéros d'entrée 0,1,. . . , N-1 et dont les arêtes sont l'union des deux ensembles :

- $E_1 = \{u—v| \, |u—v| = N/2\}$, et
- $E_2 = \{u—w| \, |\pi(u)—\pi(v)| = N/2\}$, et

(G n'est pas nécessairement simple)

Exemple pour B_3 et $\pi = \{1, 5, 4, 7, 3, 6, 0, 2\}$.



E_1 connecte les entrées qui ne peuvent pas être envoyées vers le même sous-réseau, haut ou bas, sous peine d'avoir une congestion supérieure à 1.
E_2 connecte les entrées dont les sorties correspondantes ne doivent pas être atteintes à partir du même sous-réseau, haut ou bas, sous peine d'avoir une congestion supérieure à 1.

S''il existe un 2-coloriage de G, le routage qui envoie les paquets d'une couleur vers le sous-réseau haut (de type B_n) et les paquets de l'autre couleur vers le sous-réseau bas (de type B_n également) donne une congestion de 1.

C'est un conséquence de la définition du graphe G et de l'hypothèse inductive :

- Les paquets n'entrent pas en collision à l'entrée et à la sortie (par définition de G)
- Il n'y a pas non plus de collision dans le passage au travers des sous-réseaux B_n haut et bas (par hypothèse inductive)

Il suffit donc de montrer que le graphe G est 2-coloriable quel que soit la permutation π.

Chaque nœud de G est incident à exactement une arête de E_1 et une arête de E_2 et a donc un degré 2. Le graphe est donc un ensemble de cycles disjoints.
Pour montrer qu'il est 2-coloriable, il faut montrer que chacun de ses cycles est de longueur paire :

- Si on avait un cycle de longueur impaire, il devrait y avoir dans ce cycle soit deux arêtes successives de E_1, soit deux arêtes successives de E_2.
- Le nœud incident à ces deux arêtes aurait donc soit deux arêtes dans E_1, soit deux arêtes dans E_2.
- Ce n'est pas possible vu la définition de G.

On en déduit donc que G est 2-coloriable et donc que la congestion de B_n est 1.

$\square$

Note : le théorème donne un algorithme pour trouver un routage optimal pour une permutation donnée.

Réseau de Bénes

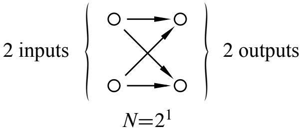
Réseau	Diamètre	Taille commut.	#commut.	congestion
Arbre binaire complet	$2\log_2 N + 2$	3×3	$2N - 1$	N
Tableau à 2 dim.	$2N$	2×2	N^2	2
Réseau de bénes	$2\log N + 1$	2×2	$2N \log N$	1

Combine les avantages des deux autres réseaux :

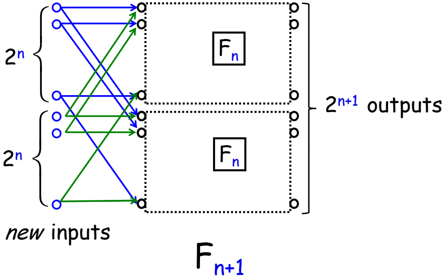
- Nombre de commutateurs et diamètre faibles
- Pas de congestion

Réseau butterfly

Cas de base : F_1



Cas inductif : F_{n+1}



Exercice : étudiez les propriétés de ce réseau.

Théorie des graphes

On a seulement effleuré quelques sujets importants en théorie des graphes.

Autres thématiques importantes :

- Planarité (voir chapitre 12 de MCS)
- Algorithmique sur les graphes (voir cours de SDA et techniques de programmation)
- Problème de flots
- Cycles eulériens et hamiltoniens
- Coupes de graphe
- ...