Nom : .... Prénom : .... Matricule : ....

Introduction à la théorie de l'informatique

Examen écrit du mercredi 15 juin 2011

Durée : 3 heures 1/2.

Lisez les consignes avant de commencer l'examen :

– Commencez par inscrire vos nom, prénom et matricule en haut de chaque page. Vous pouvez détacher les feuilles d'examen si vous le souhaitez.

– Exposez votre raisonnement de manière claire et complète si vous voulez avoir le maximum de points. Il n'est pas suffisant de donner simplement la solution finale.

– Pour les questions demandant une réponse finale numérique, entourez ou identifiez clairement la réponse finale.

– Soyez bref et concis, mais précis. Les propositions incorrectes ou hors-sujet vous feront perdre des points.

– Vous avez le droit d'utiliser **uniquement** l'ouvrage de référence et les transparents du cours théorique.

– Vous ne pouvez communiquer avec personne excepté les examinateurs pendant l'examen. Toute personne surprise à tricher recevra une note de 0/20 pour l'examen et s'expose à des sanctions.

– Cet examen comporte 5 questions. Vérifiez que vous avez bien les 5 questions sur vos feuilles d'énoncé !

– Sauf indications contraires, tous les graphes sont simples (non multigraphes) et non-orientés. Ils ne contiennent donc aucune boucle (arêtes dont les deux extrémités arrivent au même sommet) et ont au plus une arête joignant les deux même sommets.

Bon travail !

1. (a) Soit p un nombre premier strictement supérieur à 2. En utilisant de manière adéquate les résultats du cours, démontrez qu'il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $2^m \equiv 1 \pmod{p}$.
   (b) Soit p un nombre premier strictement supérieur à 2, et soit $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $2^m \equiv 1 \pmod{p}$. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si m divise n, alors $2^n \equiv 1 \pmod{p}$.

2. On considère des graphes non nécessairement connexes. Dans ce contexte, démontrez l'extension suivante de la formule d'Euler.

   Pour toute représentation planaire d'un graphe planaire $G = (V, E)$ contenant c composantes connexes, si f est le nombre de faces de cette représentation, alors on a

$$|V| - |E| + f = 1 + c.$$

   Suggestion : Utilisez une induction sur le nombre de composantes connexes.

3. Considérons la suite de nombres $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence linéaire suivante :

$$P_n = \begin{cases} 2 \text{ si } n = 0; \\ 2 \text{ si } n = 1; \\ P_{n-1} + 3P_{n-2} - 5 \text{ si } n \geq 2. \end{cases}$$

   Sans utiliser les fonctions génératrices, trouvez une solution analytique pour P_n.

4. Dans une épicerie, il y a 7 sortes de produits disponibles. On souhaite acheter 35 produits, dont au moins deux produits de chaque sorte.
   (a) Décrivez un ensemble de séquences de bits pour lequel il est possible d'établir une bijection avec l'ensemble des différents choix de produits.
   (b) Établissez une telle bijection.
   (c) Quel est le nombre de différents choix possibles de produits ? Justifiez.

5. Le spectacle d'un magicien comprend un tour de magie faisant intervenir des boules de différentes couleurs : rouges, bleues et jaunes. Pour que le tour fonctionne, les conditions suivantes doivent être réunies simultanément :
   - le nombre de boules rouges doit être pair et non nul ;
   - il doit y avoir au maximum 2 boules bleues ;
   - le nombre de boules jaunes doit être impair.

   (a) En utilisant la théorie des fonctions génératrices, trouvez une fonction telle que le coefficient du n^{e} terme de son développement en série est toujours le nombre de façons de choisir n boules de manière à ce que le tour de magie fonctionne.

   (b) Trouvez une solution analytique équivalente à la fonction obtenue au point 5a.

   (c) Trouvez une solution analytique pour le nombre de façons de choisir n boules de manière à ce que le tour de magie fonctionne.