

## Introduction à la théorie de l'informatique

Examen écrit du vendredi 13 janvier 2012

*Durée : 4 heures maximum.*

### Lisez les consignes avant de commencer l'examen :

- Commencez par inscrire vos nom, prénom et matricule en haut de chaque page. Vous pouvez détacher les feuilles d'examen si vous le souhaitez.
- Exposez votre raisonnement de manière claire et complète si vous voulez avoir le maximum de points. Il n'est pas suffisant de donner simplement la solution finale.
- Pour les questions demandant une réponse finale numérique, entourez ou identifiez clairement la réponse finale.
- Soyez bref et concis, mais précis. Les propositions incorrectes ou hors-sujet vous feront perdre des points.
- Vous avez le droit d'utiliser **uniquement** l'ouvrage de référence et les transparents du cours théorique.
- Vous ne pouvez communiquer avec personne excepté les examinateurs pendant l'examen. Toute personne surprise à tricher recevra une note de 0/20 pour l'examen et s'expose à des sanctions.
- Cet examen comporte 6 questions. Vérifiez que vous avez bien les 6 questions sur vos feuilles d'énoncé!
- Sauf indications contraires, tous les graphes sont simples (non multigraphes) et non-orientés. Ils ne contiennent donc aucune boucle (arêtes dont les deux extrémités arrivent au même sommet) et ont au plus une arête joignant les deux mêmes sommets.

Bon travail!

1. Soit  $G$  un graphe possédant exactement  $2p$  sommets et tel que le degré de chaque sommet est au moins égal à  $p$ . Démontrez que  $G$  est connexe.
  
2. Démontrez que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $4^n \equiv 1 + 3n \pmod{9}$ .
  
3. On étudie un organisme constitué de cellules de 3 types différents, dénotés  $A$ ,  $B$ , et  $C$ . Cet organisme a un mécanisme de division cellulaire particulier tel que toutes les secondes :
  - chaque cellule de type  $A$  se transforme en une cellule de type  $A$  et une cellule de type  $B$ ,
  - chaque cellule de type  $B$  se transforme en une cellule de type  $A$  et une cellule de type  $C$ ,
  - chaque cellule de type  $C$  se transforme en une cellule de type  $A$  et une cellule de type  $B$ .

Initialement, l'organisme est constitué d'une seule cellule de type  $A$ .

- (a) Soient  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  les nombres de cellules respectivement de type  $A$ ,  $B$ , et  $C$  après  $n$  secondes et soit  $T_n = A_n + B_n + C_n$  le nombre total de cellules. Trouvez une formulation analytique de  $T_n$ .
- (b) Trouvez une formulation analytique de  $B_n$ .  
(*Suggestion* : Utilisez le résultat du point précédent)
  
4. Soit l'équation suivante  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ , avec  $x_1, x_2, x_3, x_4$  des variables à valeurs entières.
  - (a) Trouvez le nombre de solutions de cette équation sous les contraintes suivantes :  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$ .
  - (b) Trouvez le nombre de solutions de cette équation sous les contraintes suivantes :  $6 > x_1 \geq 0, 4 > x_2 \geq 0, 2 > x_3 \geq 0, 16 > x_4 \geq 0$ .  
(*Suggestion* : utilisez le principe d'inclusion-exclusion)
  - (c) Prouver que si on choisit 26 quadruplets distincts de valeurs  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  respectant les contraintes du point (b), au moins deux sommeront à la même valeur.

Expliquez clairement votre raisonnement. Vos solutions ne doivent pas être simplifiées.

5. Soit la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 \\ T_1 &= 1 \\ T_n &= T_{n-1} + 2T_{n-2} \text{ pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

Sans résoudre la récurrence, prouvez que :

- (a)  $T_n$  est impair pour  $n \geq 0$
- (b)  $\text{pgcd}(T_{n+1}, T_n) = 1$  pour  $n \geq 0$

6. Un distributeur de boissons accepte uniquement les pièces de 1 cent, 2 cents et 5 cents. On vous demande de déterminer les fonctions génératrices à utiliser pour répondre aux quatre questions suivantes :

- (a) De combien de manières différentes peut-on insérer des pièces dans le distributeur pour acheter un article coûtant exactement  $r$  cents lorsque l'ordre d'insertion des pièces n'a pas d'importance ?
- (b) De combien de manières différentes peut-on insérer des pièces dans le distributeur pour constituer un montant inférieur ou égal à  $r$  cents lorsque l'ordre d'insertion des pièces n'a pas d'importance ?
- (c) De combien de manières différentes peut-on insérer  $n$  pièces ( $n$  étant fixé) dans le distributeur pour acheter un article coûtant  $r$  cents lorsque l'ordre d'insertion des pièces a de l'importance ? (*Suggestion* : commencez par écrire la fonction génératrice pour  $n = 1$ )
- (d) De combien de manières différentes peut-on insérer des pièces (en nombre quelconque) pour acheter un article coûtant  $r$  cents lorsque l'ordre d'insertion des pièces a de l'importance ?

Dans chaque cas, on vous demande de donner une formulation analytique de la fonction génératrice (c'est-à-dire sans sommation, ni "...") et de préciser la manière d'utiliser la fonction génératrice pour répondre à la question posée (sans faire explicitement le calcul).