Nom : .... Prénom : .... Matricule : ....

Introduction à la théorie de l'informatique

Examen écrit du mercredi 31 août 2011

Durée : 3 heures 1/2.

Lisez les consignes avant de commencer l'examen :

- Commencez par inscrire vos nom, prénom et matricule en haut de chaque page. Vous pouvez détacher les feuilles d'examen si vous le souhaitez.
- Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche avec nom, prénom et matricule ainsi que le numéro de la question.
- Exposez votre raisonnement de manière claire et complète si vous voulez avoir le maximum de points. Il n'est pas suffisant de donner simplement la solution finale.
- Pour les questions demandant une réponse finale numérique, entourez ou identifiez clairement la réponse finale.
- Soyez bref et concis, mais précis. Les propositions incorrectes ou hors-sujet vous feront perdre des points.
- Vous avez le droit d'utiliser **uniquement** l'ouvrage de référence et les transparents du cours théorique.
- Vous ne pouvez communiquer avec personne excepté les examinateurs pendant l'examen. Toute personne surprise à tricher recevra une note de 0/20 pour l'examen et s'expose à des sanctions.
- Cet examen comporte 5 questions. Vérifiez que vous avez bien les 5 questions sur vos feuilles d'énoncé !
- Sauf indications contraires, tous les graphes sont simples (non multigraphes) et non-orientés. Ils ne contiennent donc aucune boucle (arêtes dont les deux extrémités arrivent au même sommet) et ont au plus une arête joignant les deux même sommets.

Bon travail !

1. (a) Démontrez que si $n \in \mathbb{N}$ est un nombre à la fois impair et non divisible par 3, alors on a soit $n \equiv 1 \pmod{6}$, soit $n \equiv -1 \pmod{6}$.

   (b) Déduisez-en que si p est un nombre premier strictement supérieur à 3, alors $p^2 + 2$ est divisible par 3.

   (c) Utilisez le résultat précédent pour démontrer que si p et $p^2 + 2$ sont des nombres premiers, alors $p^3 + 2$ est également premier.

2. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le graphe $G' = (V', E')$ est un *sous-graphe induit de* G si les conditions suivantes sont réunies :
   – $V' \subseteq V$ et $V' \neq \emptyset$,
   – $E' = \{\{u, v\} \in E \mid u \in V' \text{ et } v \in V'\}$.

   (a) Démontrez que, pour tout sous-graphe induit G' d'un graphe *complet* G, le nombre d'arêtes de G' est différent de 2.

   (b) Soit G un graphe ne possédant aucun sommet isolé et aucun sous-graphe induit avec exactement 2 arêtes. Démontrez que G est nécessairement complet.

   Note : Un sommet est isolé s'il n'a aucune arête incidente.

3. Considérons la suite de nombres $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la récurrence linéaire suivante :

$$x_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0; \\ 3x_{n-1} + 2^n \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$$

   Sans utiliser les fonctions génératrices, trouvez une solution analytique pour x_n.

4. (a) En utilisant le principe des tiroirs, démontrez que toute sélection de 51 nombres distincts dans l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$ comprend nécessairement deux nombres consécutifs.

   (b) Démontrez que dans toute sélection de 51 nombres distincts dans l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$, il en existe deux qui n'ont aucun diviseur premier commun.

   Suggestion : Utilisez le résultat démontré en (a), puis raisonnez par l'absurde.

Nom : .... Prénom : .... Matricule : ....

5. Soit un jeu de cartes standard de 52 cartes, avec 4 couleurs ($\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit$) et 13 valeurs par couleur. Une *main* représente une sélection de 5 cartes parmi les 52 du jeu. Les 13 valeurs sont ordonnées de la façon suivante : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R, A.

   (a) Une main est qualifiée de "bonne" si toutes les cartes sont de la même couleur et que les valeurs se suivent selon le classement donné.
   Exemple :
   $$\{4\diamondsuit, 5\diamondsuit, 6\diamondsuit, 7\diamondsuit, 8\diamondsuit\}$$
   est une "bonne" main, mais
   $$\{4\diamondsuit, 5\diamondsuit, 6\diamondsuit, 7\diamondsuit, 9\diamondsuit\}$$
   n'est pas une "bonne" main (car 7 et 9 ne se suivent pas).

   Combien de "bonnes" mains existe-t-il ?

   (b) Une main est qualifiée de "mauvaise" si les 5 cartes ne sont pas toutes de la même couleur, qu'il n'y pas deux cartes avec la même valeur et que les 5 cartes ne se suivent pas.
   Exemple :
   $$\{2\diamondsuit, 3\clubsuit, 4\diamondsuit, 5\diamondsuit, 7\diamondsuit\}$$
   est une "mauvaise" main car il n'y a pas deux cartes avec la même valeur, les valeurs ne se suivent pas (il y a un trou entre 5 et 7) et elles ne sont pas de la même couleur ($3\clubsuit$ est un trèfle tandis que les autres sont toutes des carreaux). Au contraire,
   $$\{2\diamondsuit, 2\clubsuit, 4\diamondsuit, 5\diamondsuit, 7\diamondsuit\}$$
   n'est pas une "mauvaise" main car il y a deux cartes de valeur 2.

   Combien de "mauvaises" mains existe-t-il ?