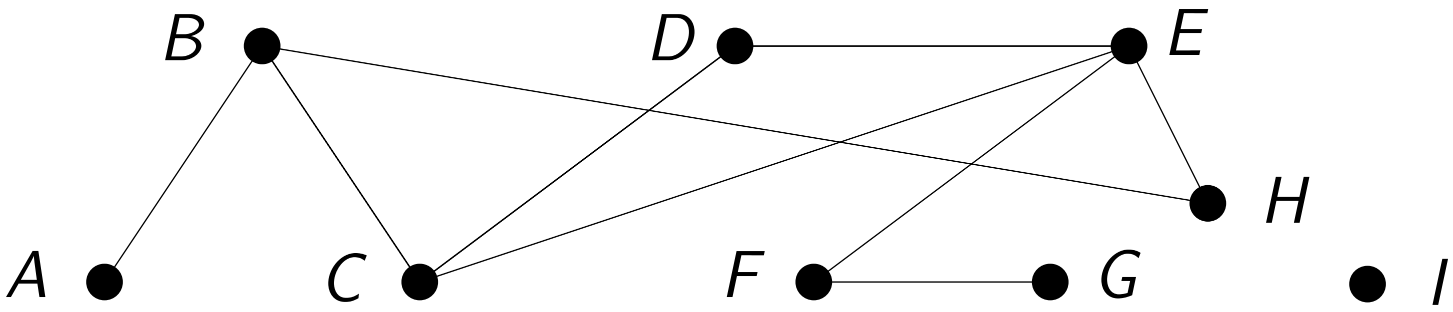
Distance et diamètre

Définition :

- La *distance* entre deux sommets d'un graphe est la longueur du plus court chemin entre eux.
- Si un tel chemin n'existe pas, la distance entre les deux sommets est dite "infinie".

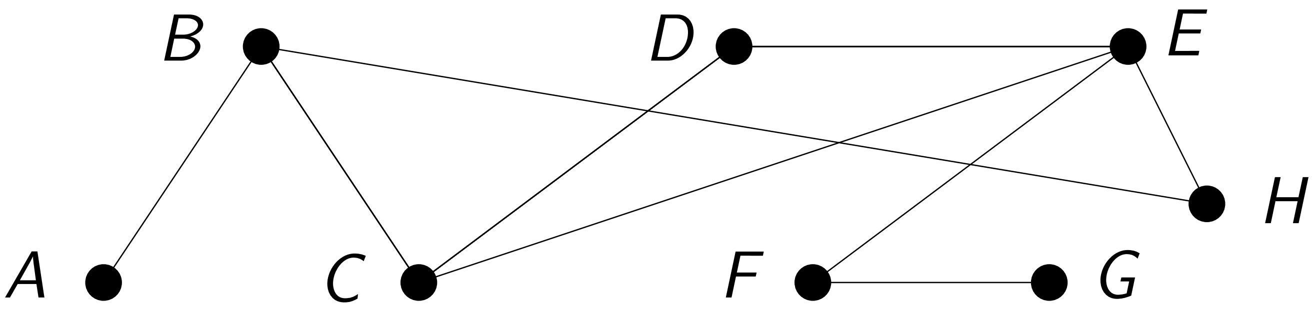
Exemple :



- la distance entre G et C est 3,
- la distance entre A et lui-même est 0,
- la distance entre I et n'importe quel autre sommet est infinie.

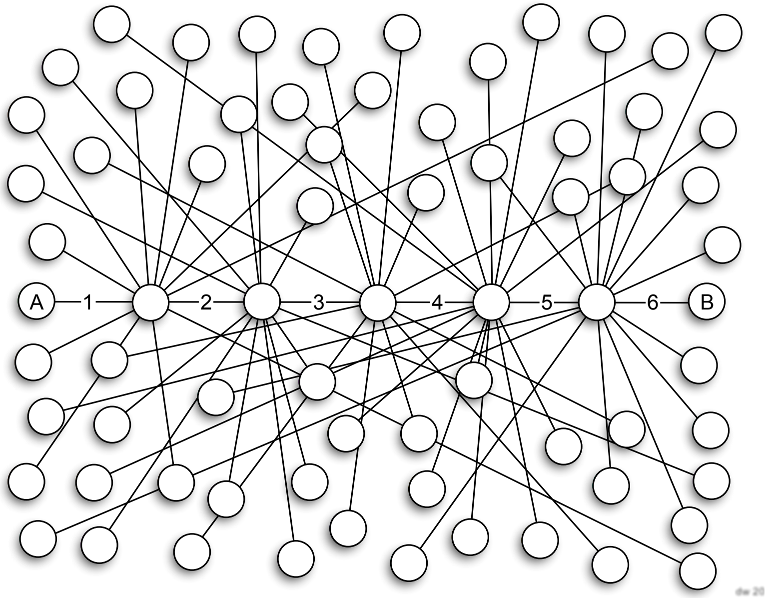
Définition : Le *diamètre* d'un graphe est la distance entre les deux sommets les plus éloignés.

Exemple :



- Les sommets qui sont les plus distants sont A et G.
- Leur distance est de 5.
- Le graphe a donc un diamètre de 5.

Six degrés de séparation



(wikipedia)

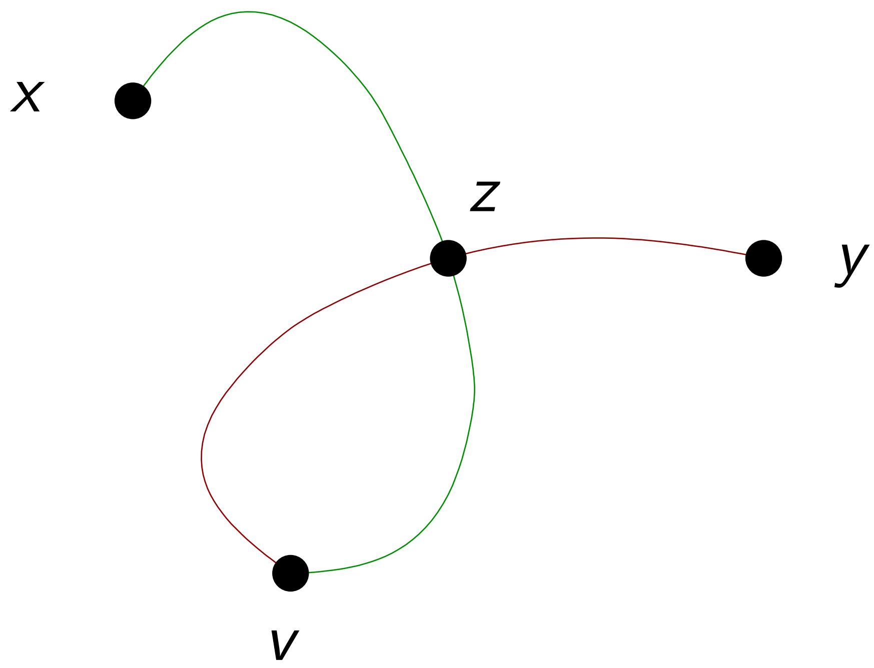
- Théorie selon laquelle deux personnes quelconques sur la planète peuvent être reliées au travers d'une chaîne d'au plus 6 relations.
- Ou de manière équivalente, le diamètre du réseau social global est au plus 6.
- Le distance moyenne a été mesuré à 6.5 (sur base de msn, facebook, etc.).

Théorème : Soit v un sommet arbitraire d'un graphe G. Si tout sommet est distant de v d'une distance au plus égale à d, alors le diamètre de G est borné par $2d$.

Démonstration :

- Soient x et y deux sommets quelconques de G.
- Il existe un chemin π_1 de longueur au plus égale à d entre x et v.
- Il existe un chemin π_2 de longueur au plus égale à d entre v et y.
- Soit z le sommet qui se trouve à la fois sur π_1 et sur π_2, et qui est le plus proche possible de x. (Un tel z existe toujours car, au pire, il pourrait être v.)
- On obtient un chemin entre x et y de longueur au plus égale à $2d$ en joignant le segment de x et z à celui entre z et y. $\square$

Illustration :



Coloriage de graphes

Problème : l'apparitorat de la faculté doit mettre au point l'horaire des examens de la session de juin.

Contraintes :

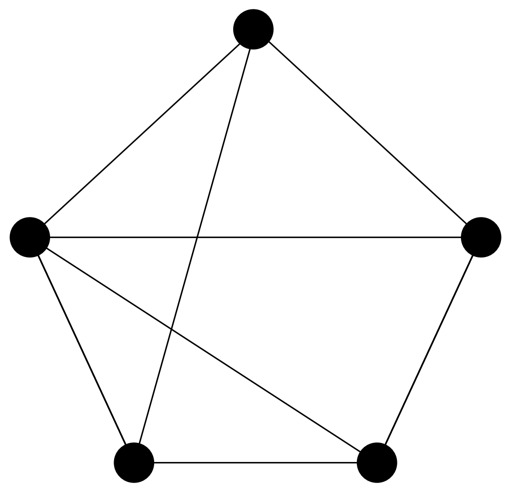
- Un étudiant ne peut pas participer à deux examens en même temps.
- La période d'examens doit être la plus courte possible.

Question : De quelle manière la théorie des graphes peut-elle nous aider à modéliser ce problème ?

Solution : Soit un graphe avec

- un sommet par cours,
- une arête entre deux sommets si au moins un des étudiants suit les deux cours.

Exemple :

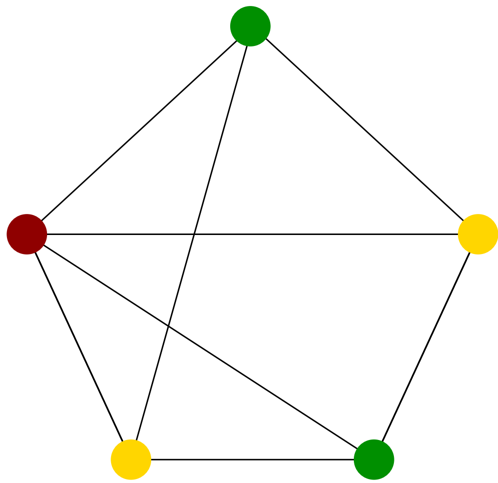


Associons une couleur à chaque plage horaire :

- lundi matin
- lundi après-midi
- mardi matin
- ...

Il est possible d'organiser l'examen sur *n plages horaires* si et seulement si il est possible de *colorier* les sommets du graphe à l'aide de *n couleurs* de telle manière que pour toute paire de sommets adjacents, ces sommets soient coloriés différemment.

Exemple :



Autres applications : allocation de registres, allocation de fréquences de station radio, coloriage de cartes...

k-coloriages

Définition : Un graphe G est *k-coloriable* s'il existe un ensemble C de k couleurs tel que chaque sommet puisse être colorié avec une couleur $c \in C$ sans que deux sommets adjacents ne partagent la même couleur.

Remarque : Tout graphe k-coloriable est nécessairement $(k+1)$-coloriable.

Définition : Le *nombre chromatique* $\chi(G)$ d'un graphe G est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier le graphe G.

Un graphe est k-coloriable ssi $\chi(G) \leq k$.

Théorème : Soit $k \in \mathbb{N}_0$, et soit G un graphe dont chaque sommet est au plus de degré k. Le graphe G est $(k+1)$-coloriable.

Démonstration :

- La démonstration fonctionne par induction sur le nombre n de sommets de G.
- Soit $P(n) =$ "Tout graphe à n sommets de degrés au plus égaux à k est $(k+1)$-coloriable".
- *Cas de base :* $P(1)$ est vrai, car tout graphe à 1 sommet est 1-coloriable.

- *Cas inductif :* Supposons que $P(n)$ soit vrai.
  - Soit G un graphe à $n+1$ sommets, chacun de degré au plus égal à k.
  - Retirons de G un sommet v arbitraire, ainsi que ses arêtes incidentes. Soit G' le graphe résultant.
  - G' est $(k+1)$-coloriable.
  - Ajoutons le sommet v et ses arêtes incidentes.
  - Le degré de v est au plus égal à k, et $k+1$ couleurs sont disponibles.
  - Associons à v une couleur différente de tous ses sommets adjacents.
  - G est donc $(k+1)$-coloriable.
- Par induction, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

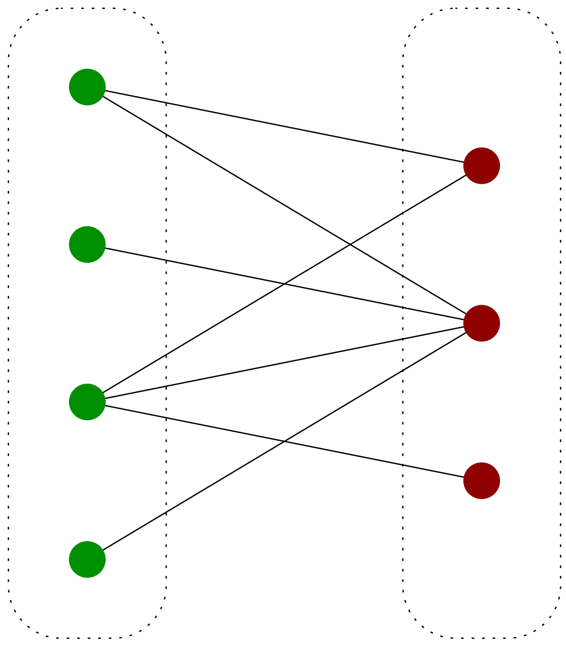
Graphes bipartis

Définition : Un graphe *biparti* est un graphe dont les sommets peuvent être divisés en deux sous-ensembles disjoints $L(G)$ et $R(G)$ tels que toute arête a une extrémité dans $L(G)$ et l'autre extrémité dans $R(G)$.

Lemme : Un graphe G est *biparti* ssi il est 2-coloriable.

Propriété : Soit G un graphe biparti. Si deux sommets u, v de G sont adjacents, alors dans tout 2-coloriage de G, un des deux sommets sera colorié avec une couleur, et l'autre sommet sera colorié avec la couleur restante.

Tout graphe biparti peut donc être représenté d'une façon similaire à la suivante :

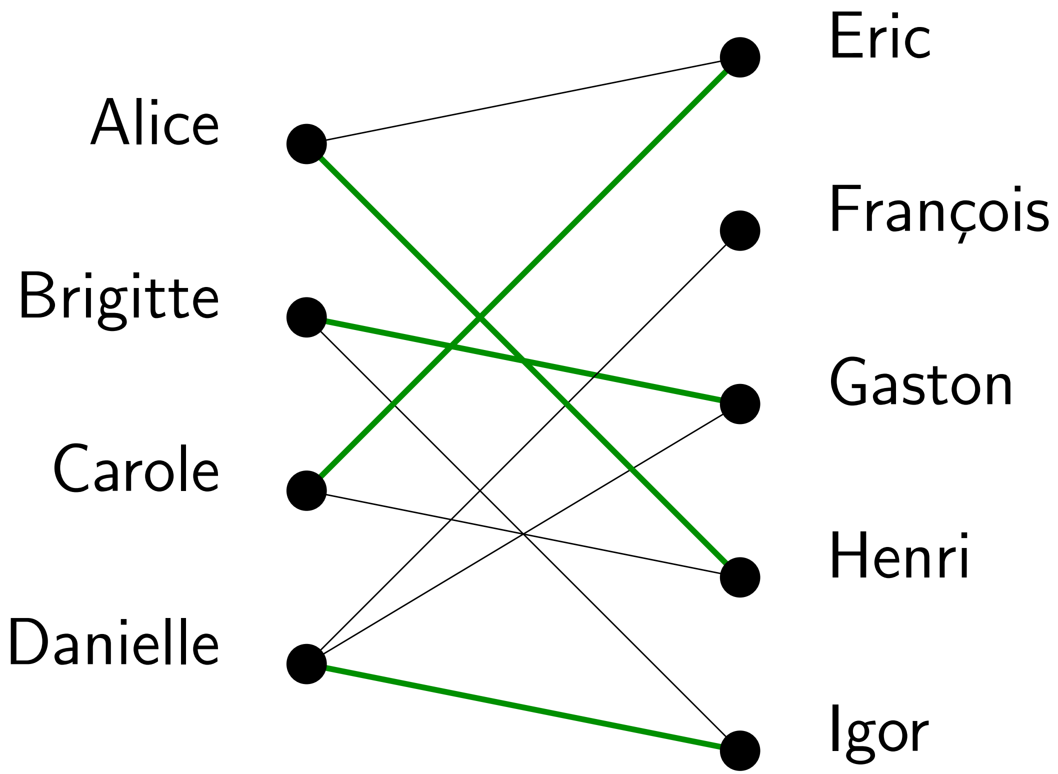


Théorème : Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

Théorème de Hall

Données : Une groupe contient un certain nombre de filles et de garçons. Chaque fille aime certains garçons.

Problème : Sous quelles conditions chaque fille peut-elle est mariée à un garçon qu'elle aime ?



Définition : L'*ensemble des garçons aimés par un ensemble de filles* est l'ensemble des garçons aimés par au moins une de ces filles.

Condition de mariage : *Tout sous-ensemble des filles aime au moins un ensemble de garçons aussi grand.*

Exemple : Il est impossible de trouver une correspondance si ensemble de 4 filles aime un ensemble composé de seulement 3 garçons.

Théorème : Il est possible de trouver une correspondance entre un ensemble F de filles et un ensemble G de garçons si et seulement si la condition de mariage est satisfaite.

Démonstration :

$\boxed{\Rightarrow}$

- Considérons une correspondance possible.
- Soit F' un sous-ensemble quelconque de F.
- Chaque fille $f \in F'$ aime au moins le garçon avec lequel elle est mariée.
- Donc, la condition de mariage est satisfaite.

$\boxed{\Leftarrow}$

- Supposons que la condition de mariage soit satisfaite, et montrons qu'il existe une correspondance.
- La démonstration fonctionne par induction forte sur $|F|$.
- *Cas de base :* Si $|F| = 1$, une correspondance existe.
- *Cas inductif :* Supposons $|F| \geq 2$.
  - \- Supposons que tout sous-ensemble propre des filles aime un ensemble de garçons *strictement plus grand*.
    \- On peut marier une fille quelconque avec un garçon qu'elle aime.
    \- La condition de mariage est satisfaite pour les personnes restantes.
    \- On peut trouver une correspondance par induction.

- - Supposons qu'un ensemble $F' \subset F$ aime un ensemble de garçons $G' \subseteq G$ tel que $|G'| = |F'|$.
  - On peut marier les filles de F' avec les garçons de G' par induction.
  - Montrons que la condition de mariage est satisfaite pour les garçons et filles restantes.
  - Soit un sous-ensemble quelconque $F'' \subseteq (F \setminus F')$. Soit G'' l'ensemble des garçons aimés par F''.
  - Il faut montrer que $|F''| \leq |G''|$.
  - Comme $F' \cup F''$ aime $G' \cup G''$, on a $|F' \cup F''| \leq |G' \cup G''|$.
  - Comme $|F'| = |G'|$, on a $|F''| \leq |G''|$. $\square$

Un énoncé formel

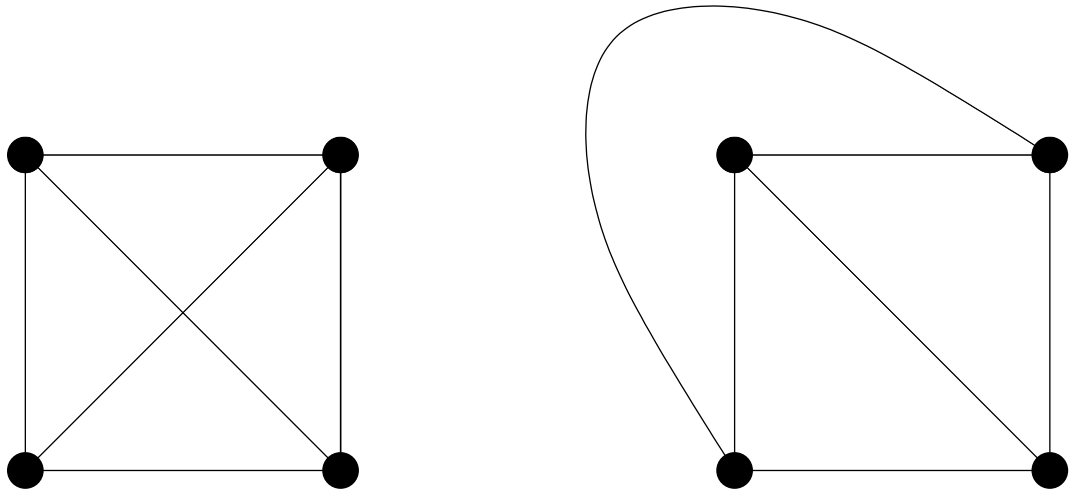
Définition : Soit S un sous-ensemble des sommets d'un graphe. $N(S)$ est défini par le nombre de sommets n'appartenant pas à S, mais adjacents à au moins un sommet de S.

Théorème : Soit $G = (L \cup R, E)$ un graphe biparti tel que toute arête a une extrémité dans L et l'autre extrémité dans R. Il existe une correspondance pour les sommets de L si et seulement si $|S| \leq |N(S)|$ pour tout $S \subseteq L$.

Graphes planaires

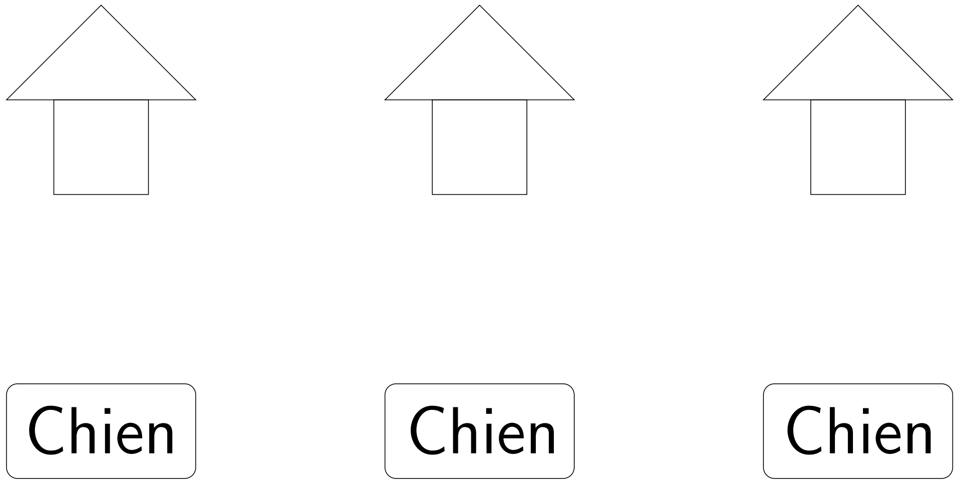
Définition informelle : Un graphe G est *planaire* s'il admet une représentation dans le plan telle que ses arêtes ne se croisent pas. Une telle représentation est appelée une *représentation planaire* de G.

Exemple :



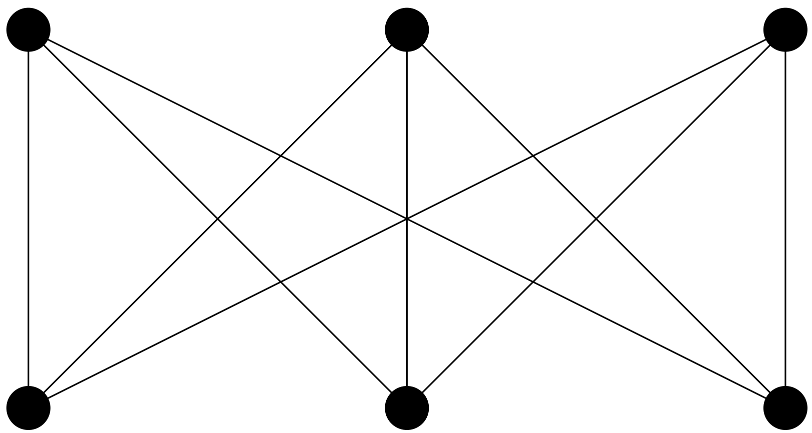
Problème

Données : Trois chiens et trois maisons



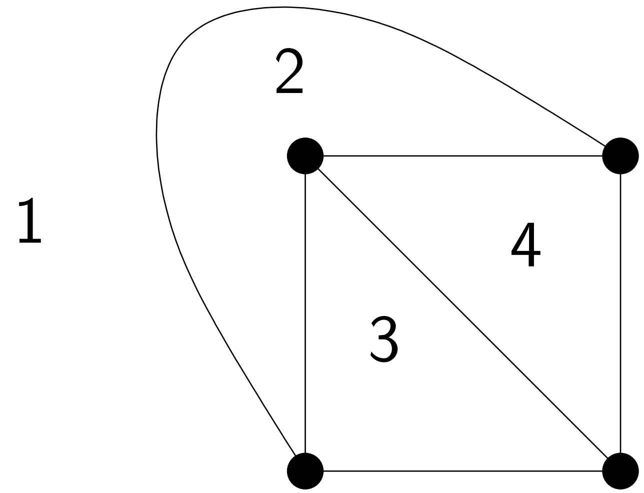
Question : Est-il possible de trouver des chemins de chaque chien vers chaque maison de telle façon qu'il n'y ait pas d'intersection ?

Réponse : C'est possible si et seulement si le graphe suivant ($K_{3,3}$) est planaire :



Formule d'Euler

Une représentation planaire d'un graphe planaire partitionne le plan en *faces* :



Théorème (formule d'Euler) : Pour toute représentation planaire d'un graphe planaire connexe $G = (V, E)$, on a

$$|V| - |E| + f = 2,$$

où f est le nombre de faces de cette représentation.

Démonstration :

- La démonstration fonctionne par induction sur le nombre d'arêtes.
- Soit $P(e) =$ "Pour toute représentation planaire d'un graphe planaire connexe $G = (V, E)$ tel que $|E| = e$, on a $|V| - e + f = 2$, où f est le nombre de faces de cette représentation".
- *Cas de base :* Si $e = 0$, on a nécessairement $|V| = 1$ et $f = 1$. Dès lors, $|V| - e + f = 2$.
- *Cas inductif :*
  - Supposons que $P(e)$ soit vrai, avec $e \in \mathbb{N}$.
  - Soit G un graphe avec $e + 1$ arêtes.
  - Si G est acyclique, alors le graphe est un arbre. Toute représentation planaire contient une seule face, et $(e + 1) + 1$ sommets. On a $(e + 2) - (e + 1) + 1 = 2$, donc $P(e + 1)$ est vrai.

- Sinon, G contient au moins un cycle.
  - Soient un arbre couvrant et une arête u—v dans le cycle, mais pas dans l'arbre.
  - Retirer l'arête u—v fusionne deux faces de la représentation planaire de G. Soit G' le graphe résultant, et soient v et f les nombres de sommets et de faces d'une représentation planaire de G'.
  - G' est connexe (l'arbre couvrant n'a pas été modifié). Donc, $v - e + f = 2$ par l'hypothèse d'induction.
  - En ajoutant l'arête u—v, on réobtient G. Il possède v sommets, $e + 1$ arêtes et $f + 1$ faces. Dès lors, $P(e + 1)$ est vrai.

- Par induction, $P(e)$ est vrai pour tout $e \in \mathbb{N}$. $\square$

$K_{3,3}$ n'est pas planaire

- Les faces d'une représentation planaire d'un graphe sont limitées par des *cycles de sommets*.
- Supposons que $K_{3,3}$ soit planaire, et considérons une représentation planaire de $K_{3,3}$.
- D'après la formule d'Euler, le nombre de faces est égal à $2 - 6 + 9 = 5$.

- Soit N le nombre moyen de sommets délimitant chaque face.
- Toute face d'une représentation planaire de $K_{3,3}$ (si elle existe) doit être délimitée par un cycle d'au moins 4 sommets. On a donc $N \geq 4$.
- Or, on a $N = \dfrac{2 \cdot 9}{5} = 3,6 < 4$, car chaque arête intervient dans les limites d'exactement 2 faces.
- C'est une contradiction, donc $K_{3,3}$ n'est pas planaire.