Chapitre 4

Théorie des graphes

Introduction

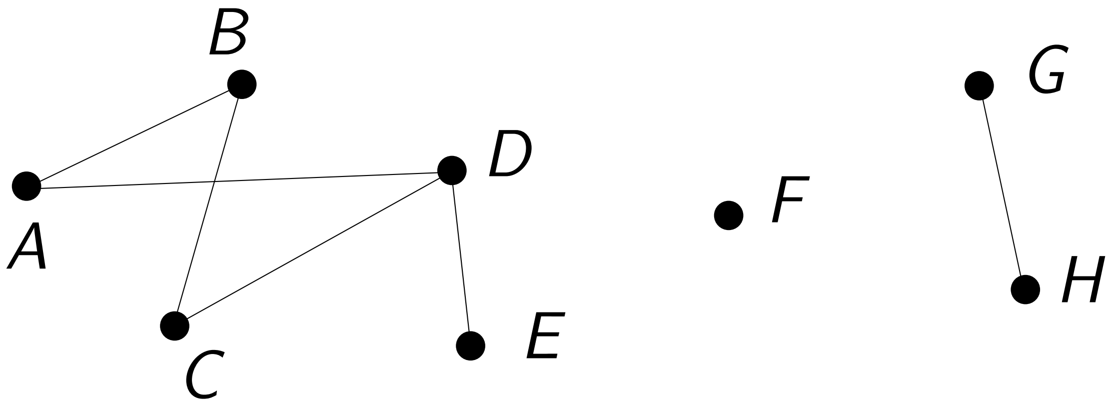
Définition : Un *graphe* est une paire $G = (V, E)$ où

- V est un ensemble fini mais non vide de *sommets*,
- E est un ensemble d'*arêtes*, chacune d'entre-elles étant un ensemble de deux sommets.

Remarques : Les sommets sont parfois appelés des *nœuds* et les arêtes des *arcs*.

Exemple :

- $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$
- $E = \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, E\}, \{G, H\}\}$

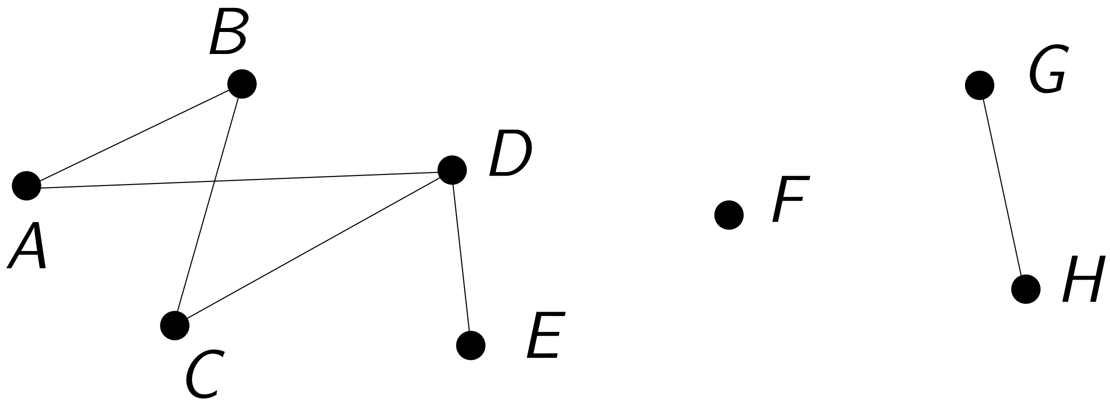


Notation : L'arête $\{A, B\} = \{B, A\}$ pourra être dénotée par A—B ou par B—A.

Définitions : Dans un graphe $G = (V, E)$,

- deux sommets $A, B \in V$ sont *adjacents* s'ils sont reliés par une arête, i.e, si A—$B \in E$;
- une arête A—B est *incidente* aux sommets A et B ;
- le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

Exemple :



- A et B sont adjacents ;
- l'arête B—C est incidente à B et à C ;
- le degré de A est 2 ;
- le degré de D est 3 ;
- le degré de F est 0 ;
- le degré de G est 1.

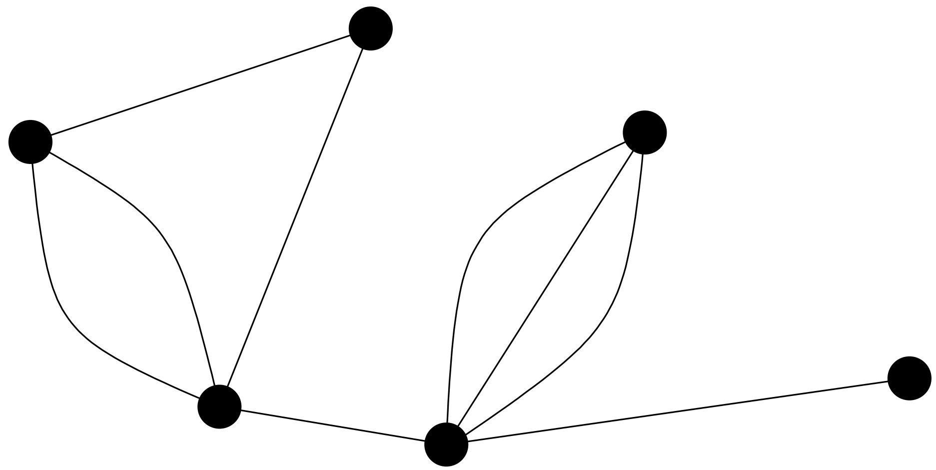
Sous-graphes

Définition : Soit un graphe $G = (V, E)$. Le graphe $G' = (V', E')$ est un *sous-graphe* de G si les conditions suivantes sont réunies :

- $V' \subseteq V$ et $V' \neq \emptyset$;
- $E' \subseteq E$;
- les sommets composant les arêtes de E' doivent appartenir à V'.

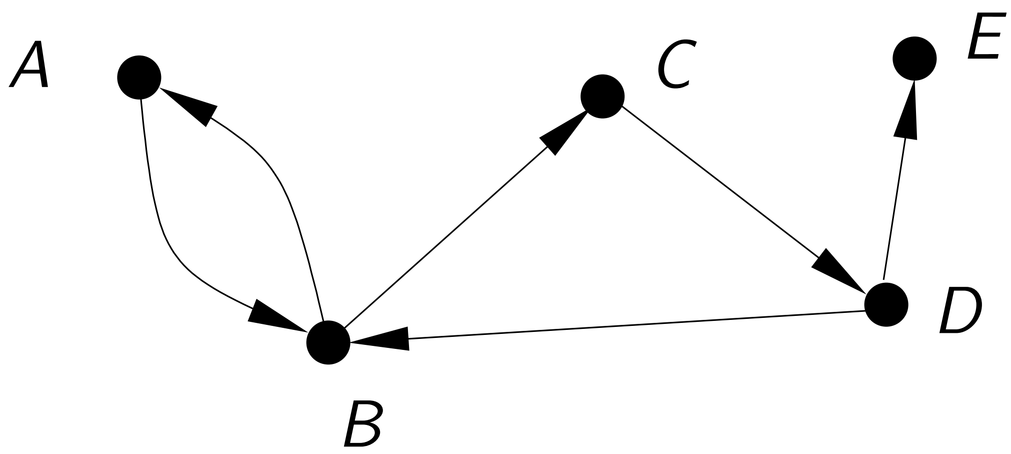
Extensions des graphes

Multigraphes : Une paire de sommets peut être connectée par *plus d'une arête*.



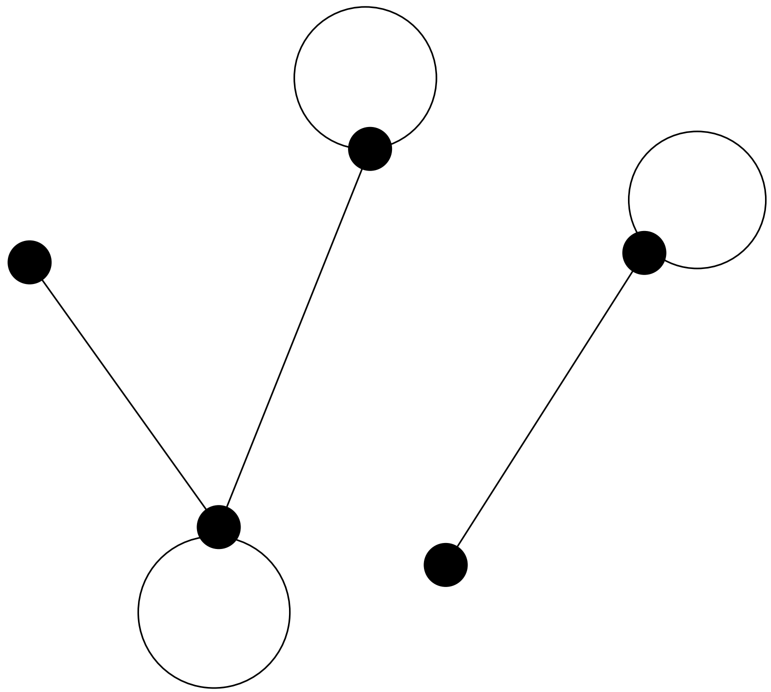
Graphes dirigés :

- Les arêtes sont des paires *ordonnées* de sommets.
- Une arête partant du sommet A et allant au sommet B est dénotée $A \longrightarrow B$.
- Le *degré intérieur* d'un sommet est le nombre d'arêtes arrivant à ce sommet.
- Le *degré extérieur* d'un sommet est le nombre d'arêtes sortant de ce sommet.



Le degré intérieur de D est 1 ; son degré extérieur est 2.

Boucles : On peut autoriser qu'un graphe contienne des boucles, c'est-à-dire qu'une arête ait pour extrémités le même sommet.



Notes :

- Des combinaisons sont possibles.
- Sauf lorsque cela sera spécifié expressément, un graphe sera toujours “simple” :
  - arêtes non dirigées,
  - pas de boucles,
  - au plus une arête entre deux sommets.

Applications

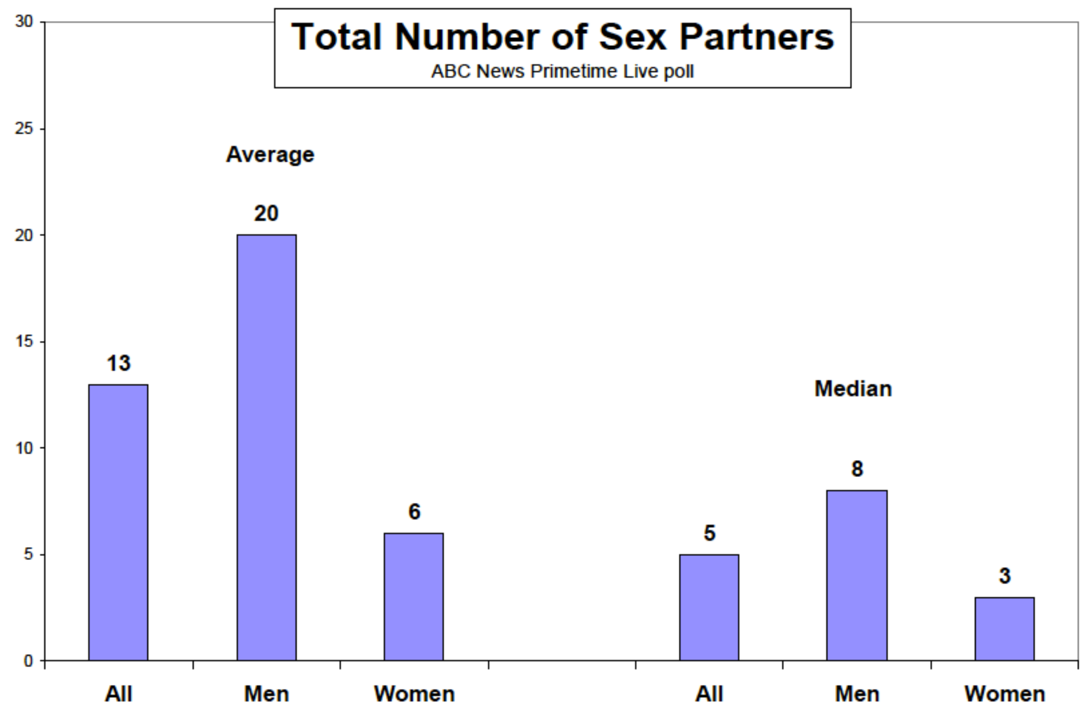
Les graphes peuvent être utilisés pour modéliser une grande variété de problèmes.

Exemples :

- cartes routières,
- connexions aériennes,
- WWW,
- réseaux sociaux,
- structures de données,
- etc.

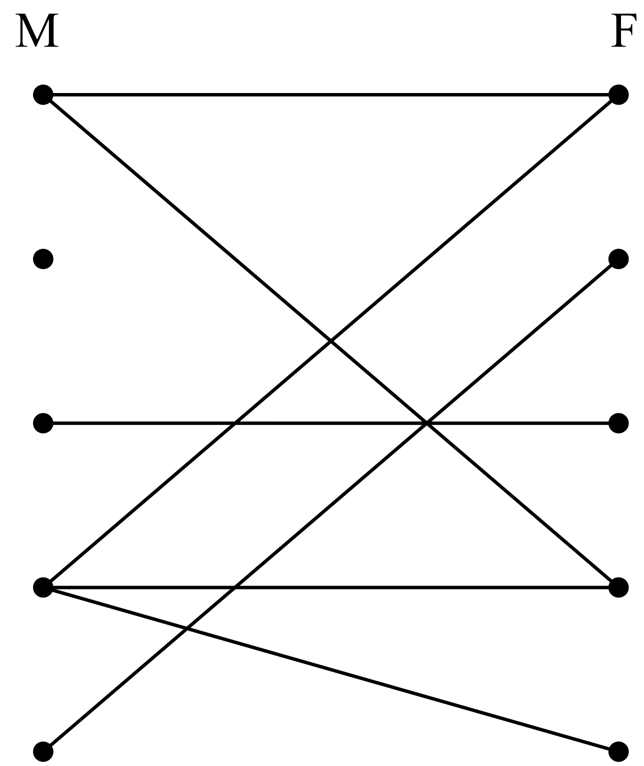
Un étude sur les comportements sexuels aux USA

- Une étude de la chaîne américaine ABC News a mené au résultat suivant :



- Ces résultats vous paraissent-ils sérieux ?

Le graphe des relations



- $G = (V, E)$ où V est divisé en deux sous-ensembles, les hommes M et les femmes F. Il y a une arête entre un homme et une femme s'ils ont eu une relation.
- Le graphe résultant est *biparti* (voir plus loin).

- Toute arête a exactement une extrémité dans M et une extrémité dans F. On a donc :

$$\sum_{x \in M} \deg(x) = \sum_{x \in F} \deg(x) = |E|$$

- En divisant les deux membres par $|M| \cdot |F|$, on obtient :

$$\frac{\sum_{x \in M} \deg(x)}{|M|} \cdot \frac{1}{|F|} = \frac{\sum_{x \in F} \deg(x)}{|F|} \cdot \frac{1}{|M|}$$

- qui donne directement :

$$\text{Avg. deg in } M = \frac{|F|}{|M|} \cdot \text{Avg. deg in } F$$

- Le rapport entre les degrés moyens ne dépend donc que du rapport entre les nombres d'hommes et de femmes dans la population
- D'après l'étude, on aurait :

$$20 = \frac{|F|}{|M|} \cdot 6,$$

c'est-à-dire 3 fois plus de femmes que d'hommes dans la population, ce qui est impossible.

Lemme des “poignées de main”

Lemme : La somme des degrés des sommets d’un graphe est égale à deux fois le nombre d’arêtes :

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2 \cdot |E|$$

Démonstration : Chaque arête ajoute deux à la somme des degrés, un pour chacun de ses extrémités. $\square$

Conséquences :

- Tout graphe a un nombre pair de sommets de degré impair.
- Exemple : il n’existe pas de graphe avec trois sommets de degrés respectivement 2,2, et 1.

Isomorphisme

Définition : Un *isomorphisme* entre des graphes $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ est une bijection $f : V_G \to V_H$ telle que :

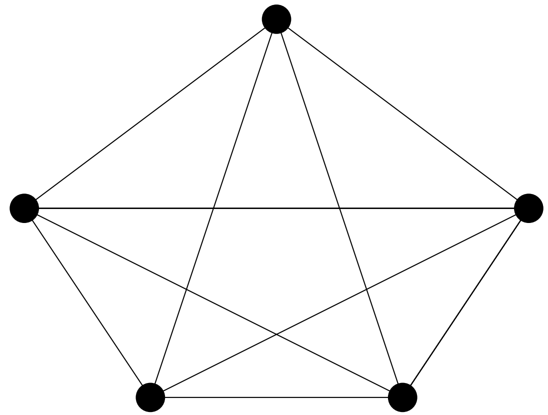
$$u \text{---} v \in E_G \text{ si et seulement si } f(u) \text{---} f(v) \in E_H$$

Deux graphes sont *isomorphes* quand il y a un isomorphisme entre eux.

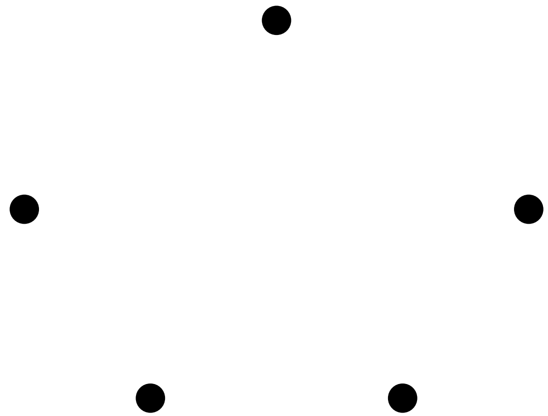
Des graphes isomorphes partagent la plupart de leurs propriétés : nombre de sommets, arêtes, patterns de degrés de sommets, etc.

Quelques graphes particuliers

- K_n, le graphe complet contenant n sommets :

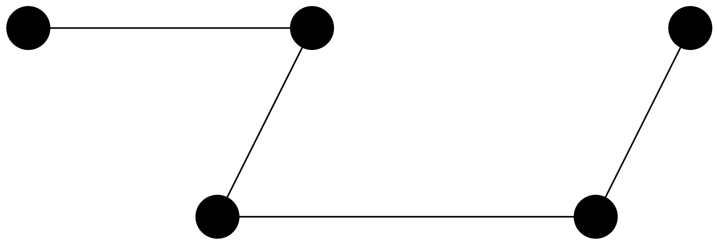


- Le *graphe vide* contenant n sommets :



- Un *chemin* est un graphe $G = (V, E)$ où
  - $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,
  - $E = \{v_1 — v_2, v_2 — v_3, \ldots, v_{n-1} — v_n\}$,
  - $n \geq 1$,
  - les sommets $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont tous distincts,
  - les sommets v_1 et v_n sont appelés les *extrémités* du chemin.

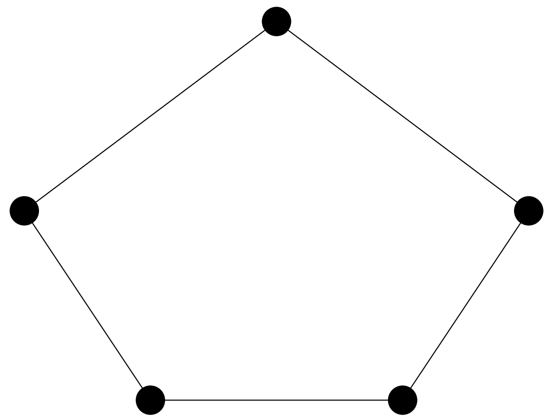
La *longueur* d'un chemin contenant n sommets est $n - 1$.



Soit $G = (V, E)$ un graphe, et $u, v \in V$. On dit qu'il *existe un chemin de u à v dans G* s'il existe un sous-graphe de G qui est un chemin à extrémités u et v.

- Un *cycle* est un graphe $G = (V, E)$ où
  - $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,
  - $E = \{v_1 — v_2, v_2 — v_3, \ldots, v_{n-1} — v_n, v_n — v_1\}$,
  - $n \geq 3$,
  - les sommets $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont tous distincts.

La *longueur* d'un cycle contenant n sommets est n.



Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un cycle dans G est un sous-graphe de G qui est isomorphe à un cycle pour une longueur $n \geq 3$.

Parcours

Définition : Un *parcours* d'un graphe $G = (V, E)$ est une séquence de sommets et d'arêtes de la forme suivante :

$$v_0 \ \ v_0 — v_1 \ \ v_1 \ \ v_1 — v_2 \ \ v_2 \ \ \ldots \ \ v_{n-1} \ \ v_{n-1} — v_n \ \ v_n$$

où $v_i — v_{i+1} \in E$ pour $i = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

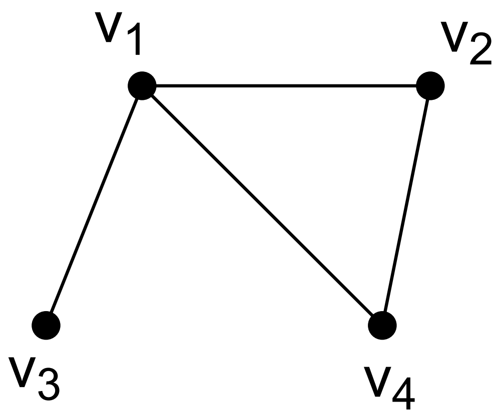
Si $v_0 = v_n$, alors le parcours est dit *fermé*. La longueur du parcours est égale au nombre d'arêtes n.

Remarques :

- Aussi appelé une *promenade*.
- Il existe un parcours entre deux sommets si et seulement si il existe un chemin entre ces sommets.
- Théorème : Le plus court parcours entre deux sommets est un chemin.

Matrices d'adjacence

- Un graphe $G = (V, E)$ avec pour sommets $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ peut être représenté par une matrice d'adjacence de taille $n \times n$. L'élément (i, j) de cette matrice vaut 1 si v_i—$v_j \in E$, 0 sinon.
- Par exemple :



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Théorème : Soit G un graphe dirigé (potentiellement avec des boucles) avec pour sommets $v_1, v_2, \dots, v_n$ et M sa matrice d'adjacence. $(M^k)_{ij}$ est égal au nombre de parcours de longueur k de v_i à v_j.

Démonstration :

- La démonstration fonctionne par induction sur k.
- Soit $P(k) =$ "$(M^k)_{ij}$ est égal au nombre de chemins de longueur k de v_i à v_j".
- *Cas de base ($k = 1$) :* Par définition de la matrice d'adjacence, $(M^1)_{ij} = M_{i,j} = 1$ s'il y a un chemin de longueur 1 entre v_i et v_j, 0 sinon.
- *Cas inductif :*
  - Supposons $P(k)$ vrai pour un $k \geq 1$.
  - Tout parcours de longueur $k+1$ entre v_i et v_j est constitué d'une chemin de longueur k de v_i à un certain sommet v_m suivi d'une arête v_m—v_j.

- Le nombre de parcours de longueur $k+1$ entre v_i et v_j est donc égal à :

$$(M^k)_{i1}M_{1j} + (M^k)_{i2}M_{2j} + \ldots + (M^k)_{in}M_{nj},$$

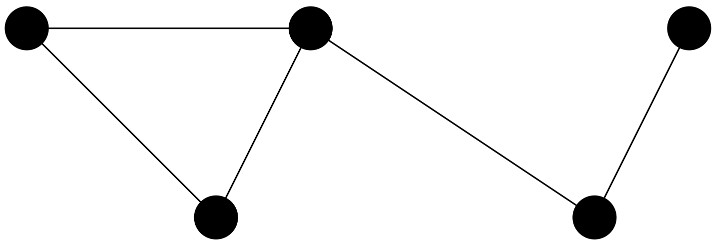
  qui est précisément la valeur de $(M^{k+1})_{ij}$.
- Par induction, $P(k)$ est vrai pour $k \geq 1$. $\square$

Application : La longueur du plus court chemin entre deux sommets v_i et v_j est la plus petite valeur de k tel que $M^k_{ij} \neq 0$.

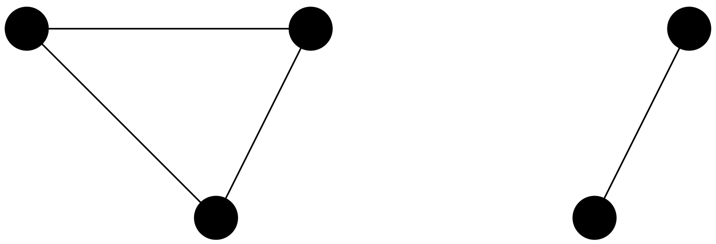
Graphes connexes

Définition : Un graphe $G = (V, E)$ est *connexe* si pour toute paire de sommets $u, v \in V$, il existe un chemin à extrémités u et v dans G.

Exemple de graphe connexe :



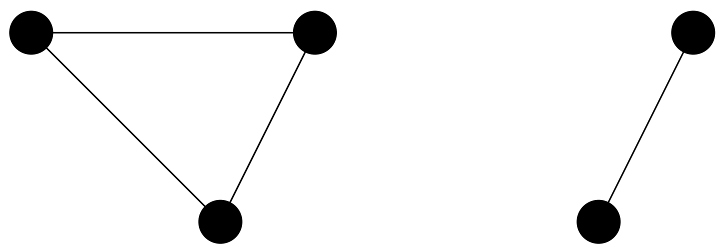
Exemple de graphe non connexe :



Composantes connexes

Définition : Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une *composante connexe* de G est un sous-graphe connexe maximal, c'est-à-dire un sous-graphe connexe tel que l'ajout de tout sommet supplémentaire rend le sous-graphe non connexe.

Exemple :



Ce graphe contient 2 composantes connexes.

Théorème : Tout graphe $G = (V, E)$ contient au moins $|V| - |E|$ composantes connexes.

Démonstration :

- La démonstration fonctionne par induction sur le nombre d'arêtes.
- Soit $P(n) =$ "Tout graphe $G = (V, E)$ avec $|E| = n$ contient au moins $|V| - n$ composantes connexes".
- *Cas de base :* Dans un graphe sans arête, tout sommet est une composante connexe. Il y en a donc exactement $|V|$.
- *Cas inductif :*
  - Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$, tout graphe contenant n arêtes possède au moins $|V| - n$ composantes connexes.
  - Soit $G = (V, E)$ un graphe contenant $n + 1$ arêtes.

- Enlevons une arête arbitraire u—v de G.
- Soit G' le sous-graphe résultant.
- Par hypothèse d'induction, G' possède au moins $|V| - n$ composantes connexes.
- Ajoutons l'arête u—v pour réobtenir le graphe G.
- Si u et v étaient dans la même composante connexe de G', alors G a le même nombre de composantes connexes que G'.
- Sinon, les composantes connexes dans lesquelles se trouvaient u et v dans G' se voient fusionnées, tandis que les autres composantes connexes restent inchangées. G a donc au moins $|V| - n - 1 = |V| - (n + 1)$ composantes connexes.

- Par induction, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

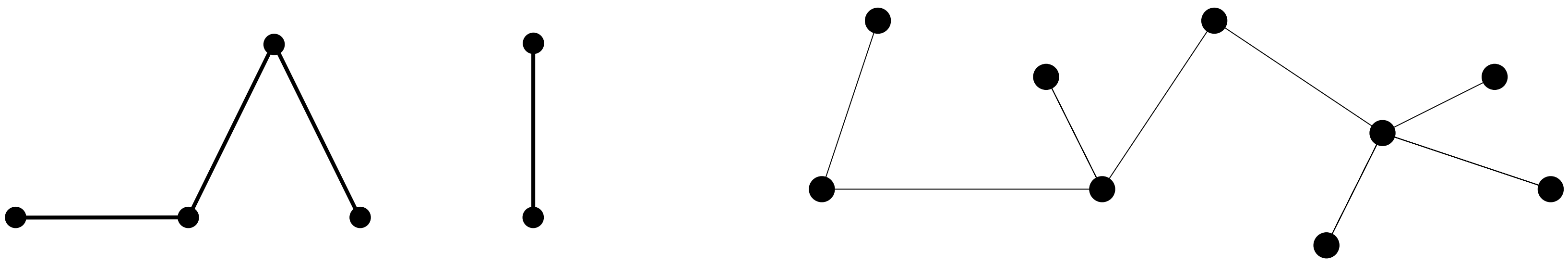
Corollaire : Tout graphe connexe contenant n sommets possède au moins $n - 1$ arêtes.

Arbres et forêts

Définition : Un graphe est *acyclique* si chacun de ses sous-graphes n'est pas un cycle. Un graphe

Définition : Un graphe acyclique est appelé une *forêt*. Un graphe acyclique connexe est appelé un *arbre*.
Toute composante connexe d'une forêt est un arbre.

Exemple :



Définition : Dans un arbre, une *feuille* est un sommet de degré 1. (Dans l'exemple, il y a 5 feuilles.)

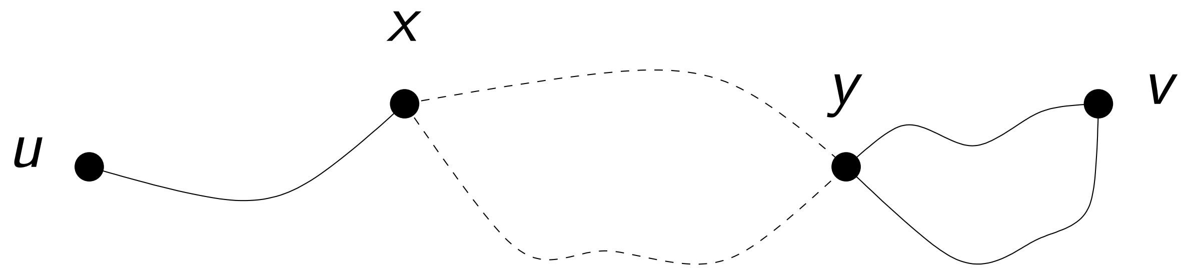
Théorème : Soit $T = (V, E)$ un arbre. Entre chaque paire de sommets, il y a un chemin unique.

Démonstration :

$\boxed{\text{Existence :}}$ Le graphe étant connexe, il y a au moins un chemin entre chaque paire de sommets.

Unicité :

- Par l'absurde, supposons qu'il existe deux chemins différents entre les sommets u et v.
- En commencant par u, soit x le premier sommet à partir duquel les chemins divergent, et soit y le sommet suivant qu'ils partagent.



- Il existe deux chemins entre x et y sans arête commune. Ils définissent un cycle.
- C'est une contradiction car les arbres sont acycliques. $\square$

Théorème : Soit $T = (V, E)$ un arbre.

1. Tout sous-graphe connexe de T est un arbre.
2. Ajouter une arête crée un cycle.
3. Retirer une arête rend le graphe non connexe.

Démonstration :

1. Un cycle d'un sous-graphe est cycle du graphe complet. Donc, un sous-graphe d'un graphe acyclique est acyclique. S'il est connexe, c'est un arbre par définition.
2. Une arête supplémentaire u—v entre le chemin unique à extrémités u et v crée un cycle.
3. - Supposons que l'on retire une arête u—v.
   - Le chemin unique entre u et v devait être u—v.
   - Il n'existe donc plus de chemin entre u et v.
   - Par conséquent, le graphe est devenu non connexe. □

Théorème : Soit $T = (V, E)$ un arbre contenant au moins 2 sommets. T contient au moins 2 feuilles.

Démonstration :

- Soit $v_1, \ldots, v_m$ la séquence de sommets d'un plus long chemin dans T.
- T contient au moins 2 sommets et est connexe. Donc, T contient au moins une arête.
- Il ne peut pas y avoir d'arête v_1—v_i, pour $2 < i \leq m$, sinon la séquence $v_1, \ldots, v_i$ formerait un cycle.
- Il ne peut pas y avoir d'arête u—v_1 où u n'est pas dans le chemin, sinon on pourrait allonger ce chemin.
- Seule arête incidente à v_1 : v_1—v_2. v_1 est donc une feuille.
- Un argument symétrique permet de montrer que v_m est une deuxième feuille. $\square$

Théorème : Soit $T = (V, E)$ un arbre. On a $|V| = |E| + 1$.

Démonstration :

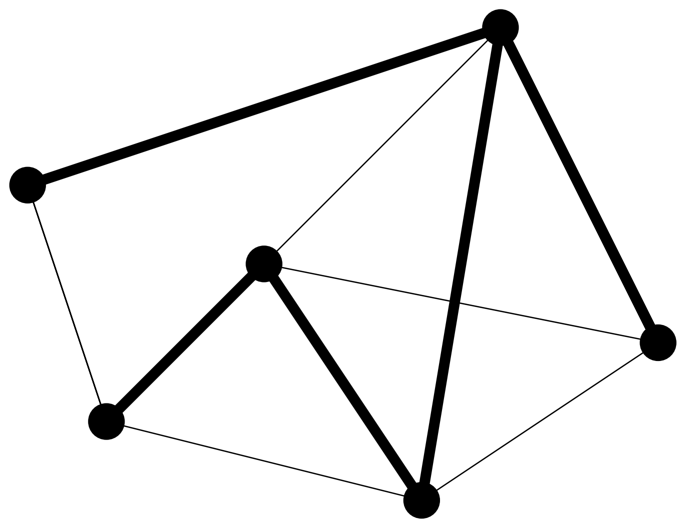
- La démonstration fonctionne par induction sur $|V|$.
- *Cas de base :* Si $|V| = 1$, on a $|E| + 1 = 0 + 1 = 1$.
- *Cas inductif :*
  - Supposons que le théorème soit vrai pour tout arbre contenant n sommets.
  - Soit $T = (V, E)$ un arbre contenant $n + 1$ sommets.
  - Soit v une feuille quelconque (elle existe car T contient au moins 1 arête, donc 2 sommets).
  - Soit $T' = (V', E')$ l'arbre obtenu en retirant v et son arête incidente.
  - On a $|V'| = |E'| + 1$.
  - En réinsérant v et son arête incidente, on obtient $|V| = |E| + 1$. $\square$

Lemme : Un graphe $G = (V, E)$ est un arbre si et seulement si G est une forêt et $|V| = |E| + 1$.

Arbres couvrants

Définition : Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un arbre $T = (V', E')$ est un *arbre couvrant* de G si $V' = V$ et $E' \subseteq E$.

Exemple :



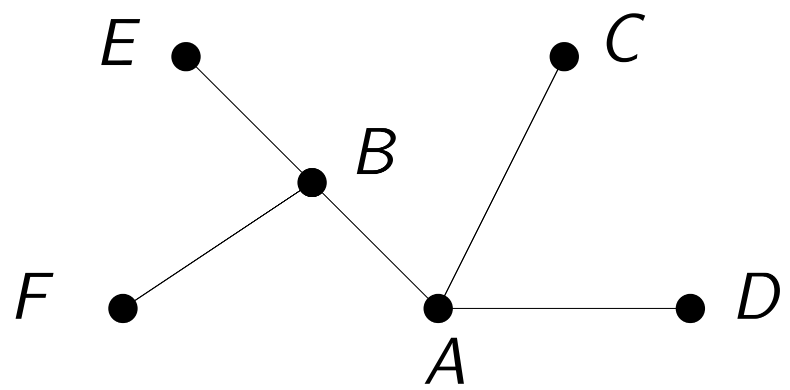
Théorème : Tout graphe connexe $G = (V, E)$ contient un arbre couvrant.

Démonstration :

- Par l'absurde, supposons que tout sous-graphe connexe $T = (V, E')$ de G soit nécessairement cyclique.
- Soit $T = (V, E')$ un de ces sous-graphes qui possède le plus petit nombre possible d'arêtes.
- T admet un cycle : $v_0 — v_1, v_1 — v_2, \ldots, v_n — v_0$.
- Supposons que l'on retire l'arête $v_n — v_0$. Soit x, y une paire de sommets quelconque.
  - Si x et y étaient connectés par un parcours ne contenant pas $v_n — v_0$, ils le restent.
  - Sinon, ils restent connectés par un parcours contenant le reste du cycle.
- Contradicition : T avait le plus petit nombre possible d'arêtes.
- Donc, T est acyclique. $\square$

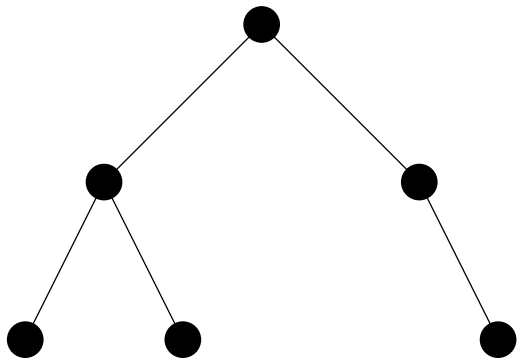
Arbres particuliers

- Arbre avec racine :
  - Un *arbre avec racine* est un arbre dans lequel un sommet est identifié comme étant la *racine*.
  - Soit u—v une arête d'un arbre avec racine telle que u est plus proche de la racine que v. Le sommet u est le *père* de v, et le sommet v est le *fils* de u.
  - Exemple :



Si A est la racine, alors E et F sont les fils de B, et A est le père de B, de C et de D.

- Un *arbre binaire* est un arbre avec racine dans lequel tout sommet a au plus 2 fils.



- Un arbre binaire est *ordonné* si les fils d'un sommet sont distingués : on les appelle *fils à gauche* et *fils à droite*.